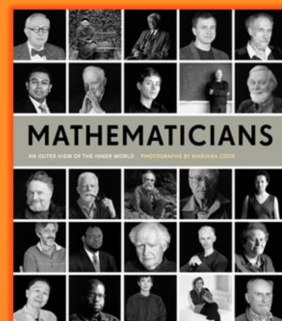
Συλλογή με Μαθηματικές εργασίες




# Ανάλυση, Γεωμετρία, Νέες Τεχνολογίες κ. ά.



**1 από 6 αρχεία**

Γιάννης Πλατάρος





Ανθυφαίρεση

Ανταναίρεση

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία

Το άπειρο

Απειροστικός Λογισμός

Αντιπαράδειγμα

2015

**Διδακτική Μαθηματικών**

**στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.**



**Μεσσήνη**

**Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος και άλλα τινά...**
**από Ιωάννης Πλατάρος - Τρίτη, 27 Σεπτεμβρίου 2011, 11:11 ΜΜ**

Οι αρχαίοι Έλληνες, έλεγαν ότι ένας «αριθμός» (εννοούσαν πάντα ακέραιο) «καταμετρεί» έναν άλλον, όταν χωρά ακέραιες φορές μέσα του. Δηλ. Το 1 καταμετρά το 10, αλλά και το 2 καταμετρά το 10 αλλά και το 5 καταμετρά το 10.

Μετά ετέθη το πρόβλημα, αν ένας αριθμός καταμετρά δύο άλλους δοθέντες. Ας πούμε, ότι έχουμε τους αριθμούς 256 κσι 120 . Και τους δύο τους καταμετρά η μονάδα. Δηλ. το 1 χωράει στο 256 256 φορές και το 1 χωράει στο 120 , 120 φορές.

Μέχρις εδώ τα πράγματα βαίνουν καλώς...

Μετά τίθεται το ερώτημα «ποιος είναι ο πιο μεγάλος αριθμός που καταμετρά το 256 και το 120» Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, αυτό το λέμε «Να βρεθεί ο ΜΚΔ των αριθμών 256 και 120» Εδώ η μέθοδος εύρεσης του ΜΚΔ των δύο αριθμών, έγκειται στην εξής περιγραφή με μη μαθηματική ορολογία: «Παίρνουμε τον μικρότερο, κοιτάμε πόσες φορές χωρά στον μεγαλύτερο και τι περισσεύει. Μετά , αυτό που περισσεύει, βλέπουμε πόσες φορές χωρά στο μικρότερο (τον 120) και τι περισσεύει αυτή την φορά. Το νέο περισσευούμενο, πόσες φορές χωρά στο προηγούμενο περισσευούμενο και γράφουμε το νέο που περισσεύει....»

Τα παραπάνω που τα περιγράφω λεκτικά, μοιάζουν με Κινέζικα έτσι όπως τα γράφω, γι αυτό, χρειάζεται η Μαθηματική γλώσσα , να περιγράψει τον Αλγόριθμο (τί είναι αλήθεια αλγόριθμος;) Πώς το κάνατε στο Δημοτικό ή στην Α΄ Γυμνασίου;

256 120

16 120

16 8

0 8

Πώς περιγράφεται η παραπάνω διαδικασία;

1) Γράφω τον μικρότερο κάτω από τον μικρότερο (το 120) κα ικάτω από τον μεγαλύτερο γράφω, ό,τι περισεύει αν κάνω την διαίρεση 256: 120 (Δηλ. το υπόλοιπο το 16)

2) Γράφω τον μικρότερο από τους δύο κάτω από τον μικρότερο (το 16) και δίπλα από το 16, γράφω, ό,τι περισσεύει (=το υπόλοιπο) αν κάνω την διαίρεση 256:16 ΚΑΙ ΟΥΤΩ ΚΑΘΕ ΕΞΗΣ, μέχρι να βρω 0 (να μην περισσεύει τίποτα) οπότε ΜΚΔ (256, 120)=8 Άρα : ο πιο μεγάλος αριθμός που μετρά ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΩΣ το 256 και το 120 είναι το 8 .

Τα παραπάνω, λεπτομερώς, περιγράφονται από την παρακάτω διαδικασία: (Χρησιμοποιώ την «ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης»)

256 = 2* 120 +16

120= 7*16 +8

16=2*16 +0

Άρα Το «μέγιστο κοινό μέτρο (που λέγαν οι αρχαίοι) των 256 κα ι120 είναι το 8»

Μια τέτοια διαδικασία, με ακεραίους όπου διαρκώς μειώνονται οι αριθμοί, τελειώνει σε πεπερασμένα βήματα (Εδώ σε τρία βήματα, έχουμε βρει τον ΜΚΔ, σε άλλες περιπτώσεις χρειαζόμαστε και άλλα, αλλά τελειώνει) (Υπάρχει αλγόριθμος που να τελειώνει σε άπειρα βήματα; Ποιά η γνώμη σας;) Τελικά, με τους ακεραίους, δεν έχουμε κανένα πρόβλημα, πάντα βρίσκουμε τον ΜΚΔ για δύο δεδομένους ακεραίους (ή και περισσότερους)

Στον Ευκλείδη, στα «Στοιχεία» του Ευκλείδους και συγκεκριμένα στο βιβλίο 10 , **όταν η παραπάνω διαδικασία τελειώνει (στους ακεραίους πάντα περατώνεται!) λέμε ότι έχουν «ρητή σχέση» "256 προς 120" Αν δεν τελειώνει, (συνεχίζει επ ΄ άπειρον) λέμε ότι έχουν τα δύο μεγέθη «άρρητη σχέση»**

Υπάρχουν μεγέθη με άρρητη σχέση μεταξύ τους;

Παίρνω δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα. Αυτά τα δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα έχουν ρητή σχέση ή άρρητη; (=τελειώνει γι αυτά ο αλγόριθμος του Ευκλείδη ή δεν τελειώνει;)

Μα πώς γίνεται ο αλγόριθμος του Ευκλείδη με δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β;

____________________α

__________________________________β

α<β

Με το μάτι (ή και με τον διαβήτη , βλέπω ότι το α χωρά στο β , 1 φορά κα ι περισσεύει το β-α (με το μάτι όλα αυτά)

Μετά, το β-α χωρά στο α μία φορά (ή μήπως δύο;) και περισσεύει;

**ΔΥΣΚΟΛΑ ΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕ ΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ!**

Δεν μπορώ να το κάνω με το μάτι! Παρ΄ότι όμως δνε βοηθά το μάτι , βοηθάει ο διαβήτης (κι αυτός μέχρι ενός σημείου!)

Αν φτιάξω ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετη πλευρά την μονάδα, η υποτείνουσα θα είναι ρίζα2 (το σύμβολο δεν μπορώ να το γράψω σε αυτό το περιβάλλον!) Έχω 1 και "ρίζα2" Στους παραπάνω δύο αριθμούς μπορώ να κάνω τον Ευκλείδειο αλγόριθμο; Ας πούμε ότι μπορώ , πώς θα ξέρω αν τελειώνει ή δεν τελειώνει;

Φτιάξετε ένα αρκετά μεγάλο σχήμα με κανόνα και διαβήτη (σωστό σχήμα) ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου Η κάθε μία από κάθε κάθετη, θεωρούμε ότι έχει μήκος την μονάδα. (αυθαίρετα την λαμβάνουμε την μονάδα) Τότε η υποτείνουσα, θα έχει μήκος «ρίζα 2» (Βγαίνει με το Πυθαγόρειο Θεώρημα που μάθατε στην Β΄Γυμνασίου)

Να κάνουμε το πρώτο βήμα: «Το 1 στο «ρίζα 2 » χωράει ΜΙΑ ΦΟΡΑ και περισσεύει κάτι (προσοχή !!! Αυτό «το κάτι» που περισσεύει, πρέπει να είναι μικρότερο από το 1 (Το 1 είναι διαιρέτης και το «κάτι» το υπόλοιπο. Το υπόλοιπο πρέπει να είναι μικρότερο από τον διαιρέτη! (Στην Α΄ Γυμνασίου δεν το μάθατε;)

Θυμίζω την «ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης»

β:α

β/α

β=απ+υ με 0=<υ<δ

Δοκιμάστε να κάνετε την διαδικασία του Ευκλείδειου αλγόριθμου που οι αρχαίοι έλεγαν με ένα άλλο όνομα (;;;) με το 1 και το «ρίζα 2 και να καταγράψουμε τις δυσκολίες. Αυτό είναι άσκηση...



**Η Ευκλείδεια διαίρεση**
**από Ιωάννης Πλατάρος - Τρίτη, 27 Σεπτεμβρίου 2011, 07:52 ΜΜ**
**Οποιονδήποτε στη σελίδα**

Τί είναι η λεγόμενη «Ευκλείδεια Διαίρεση;»

Με απλά λόγια, είναι εκείνη η διαίρεση, όπου διαιρούμε δύο ακεραίους, βρίσκουμε ένα υπόλοιπο μικρότερο από τον Διαιρέτη και την .....σταματάμε εκεί!

Έχω δηλ. την γνωστή «ταυτότητα της διαίρεσης» όπου

Δ=δ*π +υ , με υ=ο ή 0<υ<δ

Παρ΄ότι όλοι ξέρουμε (;) να κάνουμε διαίρεση αυτή η «ταυτότητα» έχει κάποιες σπουδαίες διαστάσεις που δεν φαίνονται εκ πρώτης όψεως.

Παραθέτω μία, ξεκινώντας με παράδειγμα:

Φανταστείτε έναν οποιοδήποτε τυχαίο φυσικό αριθμό. Ας πούμε τον α . Αν τον διαιρέσω με το 7 τι αποτέλεσμα θα πάρω;

Υπάρχει περίπτωση να είναι πολλαπλάσιο του 7 , οπότε διαιρείται ακριβώς και παίρνω υπόλοιπο 0

Υπάρχει περίπτωση να πάρω υπόλοιπο 1

Υπάρχει περίπτωση να πάρω υπόλοιπο 2

υπόλοιπο 3

υπόλοιπο 4

υπόλοιπο 5

υπόλοιπο 6

Τέλος! Δεν γίνεται να πάρω υπόλοιπο 7 γιατί «θα χώραγε άλλη μια φορά» που λέγαμε στο Δημοτικό!

Ούτε 8, διότι θα χωρούσε άλλη μια φορά και θα έπαιρνα και υπόλοιπο 1

Τα παραπάνω παίρνουν μια πιο συγκεκριμένη οπτική και καταλήγουν σε κανόνα που - επαναλαμβάνω- δεν φαίνεται αμέσως....

«Για οποιονδήποτε φυσικό α, ισχύει : α=7ρ ή α=7ρ+1 ή α =7ρ+2 ή α=7ρ+3 ή α=7ρ+4 ή α=7ρ+5 ή α=7ρ +6 . (ρ φυσικός) Τίποτε πέραν αυτών των περιπτώσεων!

Επτά περιπτώσεις! Για να το καταλάβουμε καλά, ότι είναι απλό και φυσιολογικό:

«Ένας τυχαίος φυσικός α, ή θα είναι μονός ή ζυγός »

Δηλ. α=2ρ ή α=2ρ+1   Μόνο. (Θεωρώντας την διαίρεση με το 2)

Το λέμε και αλλιώς:

ένας τυχαίος αριθμός α ή θα γράφεται ή 3ρ ή 3ρ+1 ή 3ρ+2 ΜΟΝΟ (θεωρώντας την διαίρεση με το 3)»

Πού θα μπορούσε να χρησιμεύσει το παραπάνω;

Για να δούμε μια εφαρμογή:

Έχουμε έναν αριθμό, φυσικό, τον α. Ο α είναι ζυγός . Το $α^2$ τί θα είναι; μονός ή ζυγός;

**Απάντηση:**

α=2ρ --> $α^2$ =$(2ρ)^2$ -->$α^2$=$4ρ^2$ -->$α^2$=2(2ρ) -->$α^2$=2κ -->$α^2$=ζυγός.

Αντίστροφο πρόβλημα:

Το $α^2$ είναι ζυγός, το ξέρουμε. Το α όμως τι είναι;

(1) Αν το α είναι μονός, τότε α=2ρ+1 -->$α^2$=$(2ρ+1)^2$ --> $α^2$=$4ρ^2$+4ρ+1  (καλά έκανα το ανάπτυγμα;) --->$α^2$=2($2ρ^2$+2ρ) +1 -->$α^2$ 2λ+1 -->$α^2$ =μονός.

(2) Αν το α είναι ζυγός τότε και $α^2$ ζυγός. (το δείξαμε στο προηγούμενο)

Άρα , από (1) κα ι(2) βγαίνει το συμπέρασμα, ότι ΜΟΝΟ όταν ο α είναι ζυγός βγαίνει το $α^2$ ζυγός.

***Επομένως***

*«Αν $α^2$ ζυγός , τότε και το α ζυγός»*

Δοκιμάστε μια άσκηση:

*«Αν α =7ρ , τότε το $α^2$ θα είναι κι αυτό πολλαπλάσιο του 7;»*

Το αντίστροφο τώρα:

*«Αν $α^2$ είναι πολλαπλάσιο του 7 , τότε το α είναι και αυτό πολλαπλάσιο του 7; »* **(Αυτό θέλει εξέταση ΟΛΩΝ των περιπτώσεων για το α)**

**Τι αριθμούς χρησιμοποιούμε όταν μετράμε;**
**από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 1 Οκτωβρίου 2011, 11:20 ΠΜ**
**Οποιονδήποτε στη σελίδα**

Μετράμε καρέκλες. Λέμε «7 καρέκλες» Από την στιγμή που θα το πούμε και το εννοούμε, οι 7 καρέκλες είναι 7. Ακριβώς 7 . Δεν έχει νόημα να πεις 7,5 ή 7,1.

Όταν όμως λέμε 7 κιλά ζάχαρη, αυτό ποτέ δεν είναι 7 . Ποτέ των ποτών που θα έλεγε και ο Χατζηχρήστος στις γνωστές του ατάκες στις Ελληνικές ταινίες. Πάντα είναι περίπου. Έχουμε ένα μέτρο, το κιλό, με το ποίο μετράμε. Έχει υποδιαιρέσεις τα γραμμάρια, αλλά και με γραμμάρια να μετρήσω, πάλι θα υπάρχει και κάτι άλλο που θα το εκτιμώ «με το μάτι» και θα το στρογγυλοποιώ. Εξ άλλου, πέρα από ένα σημείο, δεν μας ενδιαφέρει η μεγάλη ακρίβεια. Αν θέλουμε να μετρήσουμε μια απόσταση που θα την διανύσουμε με ένα αυτοκίνητο μας ενδιαφέρει πόσα χιλιόμετρα είναι. Άντε να μας ενδιαφέρει και πόσα μέτρα. Μετά παύει να έχει πρακτικό νόημα μεγαλύτερη ακρίβεια. Αν όμως μας ενδιαφέρει το μήκος μιας χρυσής αλυσίδας που θα αγοράσουμε, τότε θα μετρήσουμε με εκατοστά και χιλιοστά. Αν μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε μεγέθη ατομικά, χρησιμοποιούμε μm , δηλ. $10^{-9}$ m. (Παίρνω το 1m , το κόβω σε 1 δισεκατομμύριο ίσα κομματάκια και το ένα αυτό το χρησιμοποιώ ως μέτρο. )

Όπως καταλαβαίνει κάποιος, αυτό δεν έχει τέλος. Την μονάδα μπορούμε να την χωρίζουμε σε οσοδήποτε πολλά κομματάκια.

Για να το καταλάβουμε το παραπάνω, ας φαντασθούμε δύο αριθμούς που είναι πάρα πολύ κοντινοί. Για παράδειγμα:

**1,5723 και 1,5724**

Οι παραπάνω αριθμοί είναι πολύ κοντινοί, καθώς διαφέρουν κατά 1 δεκάκις χιλιοστό (0,0001)

Ωστόσο, ανάμεσά τους υπάρχουν ....άπειροι άλλοι αριθμοί!

Πώς μπορώ να το καταλάβω αυτό;

Ας τους φανταστώ και τους δύο, με ένα μηδενικό στο τέλος. Το μηδενικό στο τέλος, δεν προσθέτει κάτι στο μέγεθός τους φυσικά

1,57230 και 1,57240

Τώρα δεν φαίνεται ότι ανάμεσά τους χωράμε άλλοι 9;

1,57230

1,57231

1,57232

1,57233

1,57234

1,57235

1,57236

1,57237

1,57238

1,57239

1,57240

Αν έβαζα δύο μηδενικά στο τέλος, θα χωρούσαν ανάμεσά τους άλλοι 99

Αν έβαζα τρία μηδενικά , 1,5723000 και 1,5724000 θα έβλεπαν ότι θα χωρούσαν άλλοι 999

Έτσι μπορώ να βγάλω το συμπέρασμα, ότι « Αν δύο αριθμοί είναι όσο κοντά θέλουν , τότε και γω μπορώ να βάλω ανάμεσά τους όσους αριθμούς θέλω!»

Το παραπάνω να το πώ με ακριβέστερη μαθηματική γλώσσα:

«Ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς α και β , υπάρχουν άπειροι άλλοι (διαφορετικοί μεταξύ τους) ρητοί»

***Και μια άσκηση να την σκεφθείτε:***

*Δίνουμε δύο κλάσματα*

*7/51 και 8/51*

*Μπορούμε ανάμεσα σε αυτά τα δύο κλάσματα (όπως και προηγουμένως) να βρούμε άπειρα άλλα διαφορετικά κλάσματα; (Δεν είναι ανάγκη να δούμε τα δύο κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς)*

**Οι δεκαδικοί αριθμοί....**
**από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 1 Οκτωβρίου 2011, 10:28 ΜΜ**
**Οποιονδήποτε στη σελίδα**

Στην πράξη, οι δεκαδικοί, είναι σχεδόν οι μόνοι αριθμοί που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή.

Ξέρει όμως κάποιος ποίους λέμε «δεκαδικούς αριθμούς;»

Νομίζω ότι τους ξέρετε όλοι....

Είναι οι αριθμοί που γράφουμε κάθε μέρα στα κομπιουτεράκια....

Το 5, το 6 το 7, το 1000, το 20011....

Το 12,5   το 17,456    το 0,00923   κτλ

Με το που τους γράφουμε κάθε μέρα, μας δημιουργείται η απολύτως ψευδής εντύπωση ότι όλοι κι όλοι, αυτοί είναι οι αριθμοί που υπάρχουν....

Δεν πάω ακόμα στους άρρητους. Τους ξεχνάω. (Δεν τους έχουμε μάθει ακόμη επισήμως στην ύλη των Μαθηματικών, αν και έχουν γίνει νύξεις στο Γυμνάσιο.)

Μένω στους ΡΗΤΟΥΣ

**ΡΗΤΟΣ: Λέγεται κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ όρους.**

Δεν έχω καμία αμφιβολία, ότι όλοι οι δεκαδικοί , είναι ρητοί:

λ.χ. 0,0023 =23/10000

5 =5/1

2,45=245/1000

κτλ

Αν το καλοσκεφθούμε (Δεν είναι εύκολο να το σκεφθεί κανείς με τα στραβά νοήματα που εισπράττουμε!) οι δεκαδικοί, είναι στην πραγματικότητα, οι ρητοί, των οποίων οι διαιρέσεις από τις οποίες προκύπτουν ΤΕΛΕΙΩΝΟΥΝ !!!

Μην το μπερδέψετε με την «Ευκλείδεια διαίρεση» όπου δεν συνεχίζουμε την διαίρεση!

Εννοώ, ότι αν έχουμε μια διαίρεση ακέραιο με ακέραιο (δηλ. ένα ρητό αριθμό) αυτή η διαίρεση μπορεί να τελειώνει ή να μην τελειώνει, να είναι ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Κάποιες διαιρέσεις ΤΕΛΕΙΩΝΟΥΝ

Κάποιες δεν τελειώνουν ποτέ, είναι Περιοδικές.

Για παράδειγμα

Αν εκτελέσω την διαίρεση 7/2 θα βρω 3,5 ακριβώς

Αν εκτελέσω την διαίρεση 1/3 , θα βρω 0,3333333333333333333333333...(άπειρα τριάρια)

Η πρώτη διαίρεση τελειώνει ΑΚΡΙΒΩΣ, η δεύτερη ΔΕΝ ΤΕΛΕΙΩΝΕΙ ΠΟΤΕ!

Εμείς κάθε μέρα χρησιμοποιούμε ρητούς δεκαδικούς που τελειώνουν . Αυτοί αντιλαμβανόμαστε ότι είναι άπειροι . Και οι άλλοι που δεν τελειώνουν είναι πιο άπειροι! (Έχει άραγε νόημα αυτό το «πιο άπειροι» 'ή είναι σχήμα λόγου;)

Θα το διατυπώσω σαφώς το ερώτημα:

Εκτελώ μια διαίρεση φυσικός δια φυσικό. *(Έχω ένα φανταστικό σακούλι, που χωράει τους άπειρους φυσικούς και παίρνω δύο στην τύχη!)* Το αποτέλεσμα θα είναι ή δεκαδικός

τερματιζόμενος ή δεκαδικός περιοδικός. Το ερώτημα (που δεν είναι καθόλου εύκολο να απαντηθεί με αυτά που ξέρετε) είναι:

**Ποιά η πιθανότητα να πάρω τερματιζόμενο και ποιά η πιθανότητα να πάρω περιοδικό;**

Αν σας αποκαλύψω την απάντηση, **ΔΕΝ ΘΑ ΤΗΝ ΠΙΣΤΕΥΕΤΕ!**

Για ψάξτε το όσοι θέλετε και σε κάποια φάση, θα ασχοληθούμε και με αυτό το ερώτημα! (Κάπου κάτι έχετε πει στην Β΄Γυμνασίου, αλλά δεν ξέρω αν έχει μείνει στο μυαλό!) Πολλές φορές, έχουμε μια αλήθεια μπροστά μας, αλλά δεν την βλέπουμε γιατί δεν μας προβληματίζει και την θεωρούμε ως «φυσική» με τον ίδιο τρόπο που και μια γάτα βλέπει τηλεόραση, αλλά δεν προβληματίζεται καθόλου για το πώς και το γιατί της....

**Μια βασική άσκηση που περιέχει και την θεωρία του Ευκλείδειου Αλγορίθμου.**
**από Ιωάννης Πλατάρος - Παρασκευή, 7 Οκτωβρίου 2011, 04:39 ΜΜ**
**Οποιονδήποτε στη σελίδα**

**Θέλω να βρω τον ΜΚΔ(α,β) με α<β**

Πρώτο βήμα:

β=α*π+υ

Δεύτερο βήμα:

$α=κ*υ+υ_1$

Τρίτο βήμα:

$υ=λ*υ_1 + υ_2$

Τέταρτο βήμα.........

..................

Έως ότου βρούμε 0 υπόλοιπο ( Στην Ανθυφαίρεση φυσικών αριθμών (:=Ευκλείδειος Αλγόριθμος) πάντα θα βρούμε στο τέλος 0. Αν όμως είναι να ανθυφαιρέσουμε αντί φυσικούς Ευθύγραμμα τμήματα ή άλλα μεγέθη, τα πράγματα είναι πιο δύσκολα)

Το θέμα αφορά την ανθυφαίρεση ακεραίων

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ο ΜΚΔ $(α,β)$=ΜΚΔ$(α,υ)$=ΜΚΔ$(υ,υ_1)$=...=(τελευταίο βήμα όπου έχω 0 υπόλοιπο) )ΜΚΔ(υ', υ'') =υ''

**Σκεφθείτε το και εξηγήστε το....**

*Βοήθεια:*

*«Αν ένας αριθμός διαιρεί (:=χωρά ακριβώς ακέραιες φορές) δύο άλλους , τότε θα διαιρεί και την διαφορά τους.»*

Ξεκινήστε από αυτό, με την βοήθεια και της ταυτότητας της διαίρεσης.

*Κι άλλη μια βοήθεια:*

Τους φυσικούς αριθμούς α και β , τους διαιρεί και τους δύο,  ο δ

Οι παρακάτω παραστάσεις έχουν δύο όρους:

α+β

α-β

κα+μβ (κ,μ, φυσικοί)

α-λβ

ρα-β

Από κάθε αλγεβρική παράσταση βγαίνει κοινός παράγοντας το δ (γιατί;)

**Οι δεκαδικοί και οι δεκαδικοί περιοδικοί....**
**από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 8 Οκτωβρίου 2011, 09:26 ΜΜ**
**Οποιονδήποτε στη σελίδα**

Γιατί οι δεκαδικοί είναι ρητοί;

Διότι κάθε δεκαδικός, μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με όρους ακεραίους

Να πώς:

1,2 = 12/10

0,1 =1/10

5% =5/100

5=5/1

-8=-8/1

457,2436097584598 = 452436097584598 /  1000000000000

Τα παραπάνω τα μάθατε στην Β΄Γυμνασίου

Τί άλλο μάθατε;

Δεκαδικοί περιοδικοί, με άπειρα δεκαδικά ψηφία, είναι ρητοί

Παράδειγμα 1:

0,33333333333......... (οι τελείες δείχνουν το ατελεύτητο. Μπορεί να τους γράψουμε και 0,3 με περισπωμένη στο 3. Εδώ,  σε αυτή την διεπαφή, δεν μπορώ να το κάνω.)

Βήμα 1ο : Βαπτίζω τον αριθμό 0,33333333...... ως χ. Δεν σας το έχει πει κανένας, αλλά το να δεις μια άπειρη αναπαράσταση με αριθμούς και να την θεωρήσεις ως «αριθμό», έχεις κάνει ένα λογικό πήδημα. Δηλ. πού το ξέρω ότι «αυτό το άπειρο πράγμα» (δηλ. το 0,33333333333333.......) είναι αριθμός; Με αυτά που ξέρω, αυτή την παράσταση την άπειρη μπορώ να την περιορίσω. λ.χ.

0,3<0,333333333......<0,4

Μπορώ να την περιορίσω πιό πολύ;

0,33<0,333333333....<0,34

Ακόμα πιο πολύ στενεύω το διάστημα που περιορίζω την παράσταση

0,333<0,33333333333......<0,334

0,3333<0,33333333333......<0,3334

0,33333<0,33333333333......<0,33334

0,333333<0,33333333333......<0,333334

0,3333333<0,33333333333......<0,3333334

0,33333333<0,33333333333......<0,33333334

0,333333333<0,33333333333......<0,333333334

0,3333333333<0,33333333333......<0,3333333334

0,33333333333<0,33333333333......<0,33333333334

Βλέπετε τον κανόνα με τον οποίο σφίγγω τον κλοιό γύρω από το 0,33333333........;

Είναι σαν μια θηλιά που διαρκώς στενεύει....

Κάθε σειρά είναι μέσα σε όλες τις προηγούμενες.

Η πιο ανοιχτή θηλιά είναι η πρώτη, η δεύτερη έχει στενέψει και είναι μέσα στην πρώτη, η τρίτη πιο στενή και είναι μέσα στην δεύτερη κοκ

**Σε κάθε βήμα του κλοιού, πλησιάζω το 0,333333333333......... και από τα δεξιά και από τα αριστερά όλο και πιο πολύ!**

Αν μπορείς να κάνεις μια τέτοια διαδικασία και μια παράσταση χ (έτσι έχω βαπτίσει την παράσταση  0,3333333......)  να την εγκλωβίζεις σε διαρκώς μικρότερα διαστήματα, όπου το επόμενο  είναι μέσα στο προηγούμενο, τότε αν μπορείς να το κάνεις ατελεύτητα αυτό (εδώ μπορώ να προσθέτω κάθε φορά ένα τριάρι δεξιά και αριστερά και να στενεύω τον κλοιό) **αυτό**

**οδηγεί στην ύπαρξη ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ. Αν μπορώ να κάνω αυτή την διαδικασία, να εγκλωβίζω διαρκώς την «οντότητα» 0,333333333...... σε διαρκώς στενότερα όρια, απεριόριστα, σαν να βάζω άπειρες κούκλες «ματούσκα» την μία μέσα στην άλλη, τότε είμαι σίγουρος ότι έχω να κάνω με έναν αριθμό και όχι με κάτι άλλο. Αυτή η διαδικασία μοιάζει παράξενη, αλλά έτσι είναι.**

**Επαναλαμβάνω για να καταλάβετε ΤΙ ΕΙΠΑ:**

Αν δω μια παράσταση του τύπου 0,33333333...... (με άπειρα τριάρια, ποιος μου λέει ότι αυτή η παράσταση είναι αριθμός; ΚΑΝΕΙΣ! **Δεν το ξέρω!**

Υπάρχουν παραστάσεις με αριθμούς ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΑΡΙΣΤΑΝΟΥΝ ΑΡΙΘΜΟΥΣ;

Βεβαίως!

- **1/0**
- **τετραγωνική ρίζα του -4**
- **-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1........**

**Η τελευταία άπειρη παράσταση έχει πολύ πλάκα!**

Πριν μόλις 150 χρόνια που για τα μαθηματικά είναι λίγα χρόνια δεδομένου ότι είναι μια επιστήμη με ρίζες προ Χριστού (ας πούμε από το 600π.Χ., την εποχή του Θαλή που έκανε τα μαθηματικά επιστήμη, εισάγοντας την έννοια της απόδειξης...

**Νόμιζαν ότι η παραπάνω άπειρη παράσταση ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΕΝΑΝ ΑΡΙΘΜΟ**

Η παράσταση, αν δεν το καταλάβατε ήδη, προσθέτει και αφαιρεί το 1 ΑΠΕΡΙΟΡΙΣΤΑ!

Ποιός αριθμός είναι; (προσοχή! Δεν παριστάνει αριθμό, αλλά οι άνθρωποι ΤΟΤΕ πίστευαν ότι...παριστάνει!)

**<u>Λέει ο ένας:</u>**

Η παράσταση είναι διαρκώς πλην ένα συν ένα άρα είναι το ΜΗΔΕΝ (**πολύ λογικό , ΕΚ ΠΡΩΤΗΣ ΟΨΕΩΣ!**)

Λέει ένας άλλος:

-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1.............=

-1 -(-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1..........) Δηλ. κράτησε τον πρώτο προσθετέο και τους άλλους τους έβαλε σε μια παρένθεση, αλλάζοντας τα πρόσημα)

Η παρένθεση όμως είπαμε κάνει ΜΔΕΝ!

άρα

=-1-0 =

=-1

**Βρήκε πλην ένα, ενώ πριν είπαμε ότι είναι μηδέν!!!!**

Άλλος, έκανε άλλο:

Σ=-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1.........

Σ= -1 -(-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1.........) (άλλαξε τα πρόσημα και τους έβαλε μετά τον δεύτερο προσθετέο σε παρένθεση)

Σ=-1 -Σ -->

2Σ=-1

Σ=-1/2 (!!!!)

**Δηλ. η παράσταση κάνει και -1 κάνει και 0 κάνει και -1/2 (!!!)**

Κάποιοι σοφοί και διανοούμενοι, διάσημοι Μαθηματικοί είπαν και διάφορα μεταφυσικά γύρω από αυτό. Ότι λ.χ. είναι το μένον από όπου «παράγεται από το μηδέν το είναι! » κτλ Απίστευτες ΒΛΑΚΕΙΕΣ!

Αν σας πώ μάλιστα ότι αυτά τα έγραφαν και διάσημοι μαθηματικοί που είχαν πολλές φορές μεγαλύτερα μυαλά από τα δικά μας, **μας δίνει και σε μας το δικαίωμα στην ....βλακεία!**

Αφού γίγαντες της σκέψης **(κυριολεκτώ σε αυτό) έκαναν τόσο γελοία λάθη, μπορούμε να κάνουμε και μεις!**

## Η βλακεία έγκειται ΜΟΝΟ στο γεγονός του να κάνουμε το ΙΔΙΟ ΛΑΘΟΣ ΠΟΛΛΕΣ ΦΟΡΕΣ! («το δις εξαμαρτείν ουκ ανδρός σοφού!»)

**Συνοψίζω τώρα μαθηματικά ΤΗΝ ΑΙΤΙΑ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΛΑΘΟΥΣ:**

**Αν δούμε μια παράσταση με αριθμούς, ΔΕΝ ΠΑΕΙ ΝΑ ΠΕΙ ΝΤΕ ΣΩΝΕΙ ΚΑΙ ΚΑΛΑ, ΟΤΙ ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ ΑΡΙΘΜΟ!**

Η πιο μπροστά περιγραφείσα διαδικασία όπου περιόριζα μια παράσταση διαρκώς σε θηλιά όπου η νέα θηλιά ήταν μέσα στην προηγούμενη και μπορούσα να το κάνω αυτό ατελεύτητα, μας δίνει μια συνθήκη όπου μας επιτρέπει να αποφανθούμε αν υπάρχει ή όχι ένας αριθμός . Για την ιστορία και μόνον, η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως «Τομή Ντέντεκιντ» Δεν αποτελεί ύλη αυτό της εργασίας, το λέμε για ιστορικούς λόγους.

**Συνεχίζω αυτό που άφησα στην μέση:**

χ=0,3333333333333............

10χ=3,33333333333333............. (αφαιρώ κατά μέλη, από το δεύτερο το πρώτο))

9χ= 3,000000000000000.........

χ=3/9

χ=1/3

Άλλο:

α= 2,345454545454545454545454545....... (το 45 είναι η περίοδος , το επαναλαμβανόμενο τμήμα)

1000α =2345, 4545454545454545454545454545454545..

Πολλαπλασίασα με το 10, 100, 1000, όσο χρειάζεται να καλύψω ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟ! Δηλ. η υποδιαστολή να πάει ΤΡΕΙΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΕΞΙΑ.

Αν αφαιρέσω κατά μέλη έχω:

999α= 2343,00000000000000000000000000..........

999α=2343

α=2342/999 (ρητός αριθμός)



## Γιατί μετράμε με «δεκάδες και όχι λ.χ. με «πεντάδες»;
**από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 22 Οκτωβρίου 2011, 02:21 ΜΜ**
**Οποιονδήποτε στη σελίδα**

Οι μαθηματικοί θα έλεγαν το ίδιο ερώτημα του τίτλου ως **«γιατί χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και όχι λόγου χάριν το πενταδικό;»**

Με άλλη λόγια:

«Γιατί για να γράψουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς (άπειρους στο πλήθος) πρέπει να χρησιμοποιούμε δέκα ψηφία (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) και όχι λ.χ. πέντε ή δύο ή δεκαπέντε;

Η απάντηση είναι ότι ο μόνος λόγος είναι, **ότι έχουμε μόνο δέκα δάκτυλα** και κάθε φορά που μετρούσαμε κάποιο μεγάλο πλήθος και μας .....τελείωναν, κάναμε κάποια διακοπή, μετρούσαμε «ένα τέλειωμα των δακτύλων» με κάποια γραμμούλα που γράφαμε στο χώμα ή ένα πετραδάκι που βάζαμε σε ένα σωρό και εξακολουθούσαμε να μετράμε λ.χ. τα .....πρόβατα κάνοντας μια γραμμούλα ή βάζοντας ένα πετραδάκι στο σωρό. (Κάναμε σωρούς με πετραδάκι που ήταν ΔΕΚΑΔΕΣ!) Αν μετά πηγαίναμε να μετρήσουμε και τις δεκάδες και μας τελείωναν τα δάκτυλα, βάζαμε μια **πολύ μεγάλη πέτρα** σε έναν άλλο χώρο και είχαμε τις εκατοντάδες κτλ !

Ο λόγος δηλαδή που τελειώνουμε στο δέκα και μετά δέκα δεκάδες κάνουν μια εκατοντάδα και δέκα εκατοντάδες κάνουν μια χιλιάδα κτλ είναι ότι έχουμε .....ΔΕΚΑ ΔΑΚΤΥΛΑ!

**Γίνεται δηλαδή να μετρήσουμε κι αλλιώς;**

Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να μετρήσουμε με όσα «δάκτυλα» θέλουμε αφού έχουμε καταλάβει «το κολπάκι» της απαρίθμησης (=καταμέτρησης)

Ας πάμε στον Πλανήτη Πενταδάκτυλο όπου εκεί οι άνθρωποι έχουν δύο χέρια με δύο δάκτυλα στο ένα χέρι και τρία δάκτυλο στο άλλο! (Τέρατα είναι, όσα δάκτυλα θέλουν έχουν!)

**Αυτοί πώς ΘΑ μετρούσαν όταν ανεκάλυπταν την απαρίθμηση;**

Δεν είναι υποχρεωτικό να χρησιμοποιούσαν τα δικά μας σύμβολα αλλά μάλλον θα ήταν κι αυτά πέντε στον αριθμό. Θα μπορούσαν να είναι τα

^ για το 0

! για το 1

@ για το 2

# για το 3

$ για το 4

Δεν χρειάζονται άλλα είναι πέντε (μαζί με το 0)

Αλλά για να μην μπερδευτούμε, θα αποκωδικοποιήσουμε τα δικά τους σύμβολα με τα δικά μας , δηλ. 0,1,2,3,4.

Πώς θα μετρούσαν;

**Πάμε:**

1 (δεν θα το λένε «ένα» θα το λένε κάπως αλλιώς, ας πούμε «γκου» , αλλά για να μην μπερδευτούμε, το αποκωδικοποιούμε και μεις και το λέμε «ένα»

2 («δύο»)

3 («τρία»)

4 («τέσσερα» )

10 (δεν το λένε «δέκα» αλλά «μια πεντάδα» με μια λέξη!)

11 (μια πεντάδα ένα)

12 (μια πεντάδα δύο)

13 (μια πεντάδα τρία)

14 (μια πεντάδα τέσσερα)

20 (δύο πεντάδες, μηδέν μονάδες, «δυοπεντάδες»)

21 (δυοπεντάδεςένα)

......................

.......................

......................

43 (τέσσερις πεντάδες τρία)

44 (τέσσερις πεντάδες τέσσερα)

100 (πεντε-πεντάδες)

101 (πεντεπεντάδες ένα)

...........................

...........................

κτλ

Το ίδιο δεν κάνουμε και με τα δέκα που έχουμε εμείς οι ....Γήινοι;)

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10 ( ένα τέλειωμα δακτύλων που λέμε «δέκα»)

11 (δέκα ένα , που για ιατρικούς λόγους διαβάζουμε ανάποδα ένα-δέκα, εν-δέκα ένδεκα, έντεκα)

12 δυό-δέκα το οποίο κι αυτό διαβάζουμε ανάποδα δυόδεκα-δώδεκα)

13 (δεκατρία που διαβάζουμε συμβατικά, ενώ οι Γάλλοι αν καλώς έχω πληροφορηθεί έχουμε τέτοια «ειδικά ονόματα» μέχρι το 15)

14

15

16

17

18

19

20 (δύο δεκάδες που λέμε «είκοσι»)

30 (τρεις δεκάδες που λέμε «τρι-άντα»)

40 (τέσσερις δεκάδες που λέμε («τεσ-σαρα-ντα»)

50 (πεντε δεκάδες που λέμε «πεν-ήντα» )

60 (που λέμε «εξ-ήντα»)

70 (που λέμε «εβδομ-ήντα»

80 «που λέμε «ογδ-όντα» ή ....«ογδομήντα(!)» που μου είπε ένας γεράκος μια φορά αναφερόμενος στην ηλικία του κάνοντας το ίδιο λάθος (αναλογικό) που λέμε αυτή την περίοδο χιλιάδες Έλληνες τον Οκτώβριο ως «ΟκτώΜβριο»)

90 (που λέμε «ενεν-ήντα»)

100 που είναι δύο «δεκαδεκάδες» και που λέμε ειδικώς «εκατό(ν)»

Αν δεν καταλάβατε «τι παίζει» διαβάστε άλλη μια φορά το κείμενο και ελπίζω να το κατανοήσατε.....

Αν πάντως αντί για 10 ή 5 «παίξω» με το 2, φτιάχνω το δυαδικό σύστημα όπου χρησιμοποιώ το 0 και το 1 ΜΟΝΟ για να φτιάξω ΟΛΟΥΣ τους αριθμούς. (Το λέμε δυαδικό, αλλά δεν χρησιμοποιούμε το 2, όπως το πενταδικό που ΔΕΝ χρησιμοποιούμε το 5 , όπως ΔΕΚΑΔΙΚΟ, όπου ΔΕΝ χρησιμοποιούμε το ΔΕΚΑ ΩΣ ΨΗΦΙΟ (σύμβολο μόνο του, ξεχωριστό για το δέκα, αλλά το γράφουμε ως συνδυασμό με άλλα δύο ψηφία , το 1 και το 0 , δηλ. 10=δέκα.

Για να είναι άρρητος ένας αριθμός , θα πρέπει στο δεκαδικό του ανάπτυγμα να έχει άπειρα ΜΗ περιοδικά ψηφία.

*Το παραπάνω, **δεν είναι δυνατόν να αποτελεί κριτήριο**, αφού ουδείς μπορεί να μετρήσει άπειρα*

*ψηφία (πλην - ίσως - του Τσακ Νόρις που έχει μετρήσει μέχρι το άπειρο, δύο φορές!)*

Για να είναι άρρητος ένας αριθμός θα πρέπει να μην μπορεί να εξισωθεί με κλάσμα με ακεραίους όρους

*Το παραπάνω, είναι κριτήριο, αφού συνήθως **θεωρούμε ότι αυτό είναι εφικτό** και κάνοντας απολύτως λογικά βήματα, καταλήγουμε σε κάτι που δεν έχει τόπο για να σταθεί (άτοπο) Αφού ΔΕΝ κάναμε λάθη στην πορεία των συλλογισμών και καταλήξαμε σε (με συγχωρείτε για την έκφραση) μια σαχλαμάρα, πάει να πει ότι **ΞΕΚΙΝΗΣΑΜΕ ΑΠΟ ΛΑΘΟΣ!** Δηλαδή, κακώς; είπαμε ότι εκφράζεται ως κλάσμα με ακέραιους όρους (=ρητός) άρα ΔΕΝ είναι σωστό αυτό, δεν εκφράζεται ως κλάσμα με ακέραιους όρους , άρα είναι ΑΡΡΗΤΟΣ.*

Θα έχετε ακούσει την έκφραση «αν η γιαγιά μου είχε ρουλεμάν θα ήτανε πατίνι» Για να το καταλάβετε πλήρως, πρώτα να σας πώ για το πατίνι:

Τα παλιά τα χρόνια, δεν υπήρχαν τροχοί αντοχής , ενώ τα παιγνίδια ήταν ιδιοκατασκευές (τα έφτιαχνε ο κάθε ένας μόνος του και χειροποίητα)

Ένα ρουλεμάν είναι συνήθως δύο κυλινδρικές ατσάλινες επιφάνειες ανάμεσα στις οποίες έχουν εγκλωβιστεί ατσάλινα σφαιρίδια. Αν σφηνώσεις ένα ξύλο μέσα στην κυλινδρική επιφάνεια, η εξωτερική επιφάνεια, με την βοήθεια των σφαιριδίων περιστρέφεται γύρω από την πρώτη και έτσι έχω τροχό μικρό και τεράστιας αντοχής. Με αυτά έφτιαχναν τροχούς για πατίνια!

Πάμε τώρα στην έκφραση «Αν η γιαγιά μου είχε ρουλεμάν θα ήτανε πατίνι» Σύμφωνα με την κοινή λογική, αυτό είναι ένα ΛΟΓΙΚΟ συμπέρασμα (λέω «κοινή λογική», γιατί αν το αυστηροποιήσω, μπορεί και να είναι πωλητής ανταλλακτικών μηχανών η γιαγιά!)

Σε μια λιγότερο αυστηρή λογική λοιπόν, η παροιμιώδης αυτή λαϊκή έκφραση μπορεί να θεωρηθεί (με λίγες επιφυλάξεις) ΕΝΑ ΛΟΓΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.

Πράγματι:

Αν η γιαγιά φέρει ρουλεμάν (μάλλον , συνήθως, με αυτά που ξέρουμε) είναι πατίνι, και άρα θα τσουλάει στην κατηφόρα. Αλλά αφού η γιαγιά μου ΔΕΝ τσουλάει στην κατηφόρα λόγω κινητικών προβλημάτων, μάλλον ΔΕΝ είναι πατίνι!

Δεν ξέρω αν μπορείτε μέσα από την πλάκα να διακρίνετε τι θέλω να πώ:

Η μέθοδος της «εις άτοπον απαγωγής» είναι μια αποδεικτική λογική διαδικασία που εκμεταλλεύεται μια βασική λογική αρχή:

Κάποιος, κάποια, κάτι, έχουν την ιδιότητα Α ή ΔΕΝ την έχουν την ιδιότητα Α. Ένα από τα δύο συμβαίνει. Αν συμβαίνει το ένα , τότε δεν συμβαίνει το άλλο και αν συμβαίνει το άλλο, δεν

συμβαίνει το ένα.

**<u>Παραδείγματα:</u>**

(Σας το είπα με μορφή αστείου  στην τάξη, αλλά δεν ξέρω πόσοι μένετε στο αστείο)

Ένα σώμα έχει  μαύρο χρώμα (με την συμβατική σημασία) ή όχι μαύρο . Τίποτε άλλο. Δεν μπορεί να είναι ΚΑΙ ΜΑΥΡΟ ΚΑΙ ΟΧΙ ΜΑΥΡΟ.

Για το μαύρο, το καταλαβαίνουμε. Για το «όχι μαύρο» τί καταλαβαίνουμε;

Ο πολύς κόσμος λέει ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΑ **«το αντίθετο του μαύρου είναι το άσπρο!»** Αυτό έχει μια φυσική λογική, αλλά στην λογική όταν λέμε «όχι μαύρο» εννοούμε οποιοδήποτε άλλο χρώμα πλην του μαύρου (κίτρινο, φούξια, λιλά, μωβ, γκρίζο, γαλάζιο, πράσινο, πορτοκαλί, ΟΛΑ !)

Επομένως, τώρα γίνεται ΛΟΓΙΚΑ ΚΑΘΑΡΟ:

**Ένα σώμα είναι ή μόνο μαύρο ή ΟΧΙ μαύρο . Τίποτε άλλο τρίτο δεν γίνεται να είναι**. Αυτόν τον κανόνα τον συναντάμε στην λογική του Αριστοτέλους και είναι γνωστός με το όνομα *«Αρχή της του μέσου ή τρίτου αποκλίσεως»*

Αφού ξεκαθαρίσαμε ότι το «όχι μαύρο» δεν είναι το άσπρο, θα πάω σε ένα ακόμα πιο προκλητικό θέμα:

<u>Θέτω το ερώτημα:</u>

***«Ένας άνθρωπος έχει φύλο άρρεν ή όχι άρρεν» ΤΙΠΟΤΕ ΑΛΛΟ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ!***

***ή «άρρεν» ή «όχι άρρεν»***

<u>Το λέω σε Δημοτική απόδοση:</u>

***«Ένας άνθρωπος, είναι ή σερνικός ή όχι σερνικός!»***

**ΤΙΠΟΤΕ ΑΛΛΟ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ!**

Τα γράφω τα παραπάνω για να σας δώσω την ευκαιρία να κάνετε την....λανθασμένη σκέψη!

<u>Ποιά;</u>

Μήπως σκεφτήκανε πού κατατάσσονται οι ....γκέη;

Αν το θεωρήσατε ως ένσταση στον ισχυρισμό, κάνατε λάθος!

Να γιατί:

Ένας είναι ή άρρεν ή όχι άρρεν (=θήλυ ή «τρίτο φύλο!»)

Το καταλάβαμε;

**Πάμε στα μαθηματικά:**

**«Ένας αριθμός είναι ή θετικός ή όχι θετικός»**

Όταν λέμε «όχι θετικός» δεν εννοούμε μόνο τους αρνητικούς, αλλά και τους αρνητικούς και το μηδέν . Όλοι είναι «όχι θετικοί»

**Το να μπορείς να ξεχωρίζεις μια αντίθετη λογική πρόταση δεν είναι κάτι εύκολο. Θέλει κι άλλη εμπέδωση:**

Λέμε:

**«Όλοι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»**

**Η αντίθετη πρόταση ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ;**

(Σκεφτείτε την ΤΩΡΑ και μην διαβάζετε παρακάτω!)

//

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

(Δεν είπαμε να μην κλέβουμε; Διατύπωσε την αντίθετη πρόταση!)

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

/

(Το παίρνει το ποτάμι:)

**ΟΧΙ «Όλοι** οι μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

ΙΣΟΝ

**«ΟΧΙ ΟΛΟΙ** οι μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

ΙΣΟΝ

**«ΜΕΡΙΚΟΙ ή ΚΑΝΕΝΑΣ** μαθητές της Α΄ Λυκείου του 1ου ΓΕΛ Μεσσήνης που έχουν ερευνητική εργασία , είναι καλοί στα μαθηματικά»

Δηλαδή, η πρώτη πρόταση και η αντίθετή της καλύπτουν ΟΛΗ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ (και την θετική και την αρνητική).

Πάμε πάλι στους ρητούς και άρρητους:

ΡΗΤΟΣ=ΟΧΙ ΑΡΡΗΤΟΣ και ΑΡΡΗΤΟΣ =ΟΧΙ ΡΗΤΟΣ

Η μία έννοια είναι αντίθετη της άλλης . Μόνο αυτές τις έννοιες έχουμε δικαίωμα να λέμε «αντίθετες»

Πάμε στην **«εις άτοπον απαγωγή»**

Αν υποθέσεις ότι ένας αριθμός είναι ΡΗΤΟΣ

και μετά κάνεις ένα λογικό , σωστό βήμα και καταλήξεις σε συμπέρασμα Α

και μετά ένα λογικό , σωστό βήμα και καταλήξεις σε συμπέρασμα Β

και μετά ένα λογικό σωστό βήμα και καταλήξεις σε συμπέρασμα Γ

---------------------------------------------

.......................................

Και τέλος , ένα λογικό σωστό βήμα και καταλήξεις σε ένα συμπέρασμα Ω .

Κοίτα τώρα τι μπορεί να συμβαίνει:

Είσαι σε θέση να αξιολογήσεις, ότι το Ω που κατέληξες, σύμφωνα με αυτά που έχουν συμφωνήσει όλοι οι άνθρωποι είναι μια σαχλαμάρα (δηλ. ένα άτοπο! Κάτι που ΔΕΝ ΣΤΕΚΕΙ)

Μπορείς να πεις ΤΙ ΦΤΑΙΕΙ;

Όλα τα ενδιάμεσα βήματα είναι ΣΩΣΤΑ!

**Τί φταίει;**

Αν όλα τα ενδιάμεσα βήματα είναι σωστά, και φθάσαμε σε άτοπο, ΦΤΑΙΕΙ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΚΚΙΝΗΣΗΣ! Φταίει ότι υποθέσαμε ότι ο συγκεκριμένος αριθμός είναι ρητός! Άρα ΔΕΝ Είναι ρητός, είναι άρρητος!

Με τον παραπάνω τρόπο, βγάζουμε συμπέρασμα για την φύση ενός αριθμού, χωρίς να μπορούμε να δούμε όλη την φύση του (ποιός μπορεί να δει όλα τα άπειρα ψηφία του που είναι μη περιοδικά;)

Οι αρχαίοι Έλληνες ήξεραν ότι αν δύο μεγέθη (αριθμοί, ευθύγραμμα τμήματα) έχουν περατούμενη ανθυφαίρεση τότε μεταξύ τους έχουν ΡΗΤΗ σχέση. Συνήθως, συνέκριναν ένα μέγεθος με την μονάδα. Επειδή η Πυθαγόρεια αντίληψη ήταν ότι «η μονάς αρχή των πάντων» τους είχε «κολλήσει», ότι όλα τα άλλα είναι είτε πολλαπλάσια ακέραια της μονάδας είτε ακέραια υποπολλαπλάσια της μονάδας. ΕΚΑΝΑΝ ΛΑΘΟΣ! (Ο Ίππασος που βρήκε το λάθος, χάθηκε , μάλλον τον έπνιξαν αυτοί που δεν άντεχαν σε μια αλήθεια που άλλαζε άρδην τα πιστεύω τους )

**Προσέξετε τώρα ένα πολύ σοβαρό πραγματάκι:**

Ένας αριθμός έχει πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα ----->Είναι ρητός

**Ένας αριθμός έχει περιοδικό (άπειρο) δεκαδικό ανάπτυγμα --------> Είναι ρητός**

Ένας αριθμός έχει μη περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα -------> Είναι άρρητος

Ένας αριθμός, σε σχέση με την μονάδα , έχει πεπερασμένη ανθυφαίρεση ----> Είναι ρητός

**Ένας αριθμός, σε σχέση με την μονάδα, έχει περιοδική (άπειρη) ανθυφαίρεση ----> Είναι άρρητος**

Ένας αριθμός, σε σχέση με την μονάδα έχει άπειρη ανθυφαίρεση --->άρρητος

Δηλαδή:

Ένας δεκαδικός περιοδικός είναι πάντα ρητός

Ένας που έχει περιοδική ανθυφαίρεση με την μονάδα, είναι άρρητος!

Πώς όμως θα μπορούμε να καταλαβαίνουμε ότι κάποιος έχει άπειρη περιοδική ανθυφαίρεση;

*(ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ)*

Επεξεργασία | Διαγραφή | Μόνιμος σύνδεσμος
[ Τροποποιημένο: Τρίτη, 25 Οκτωβρίου 2011, 08:52 ΜΜ ]
Comments (0)



## Πώς γράφεται το ρητός αριθμός 1/3 στο δεκαδικό και πώς στο τριαδικό;

**από Ιωάννης Πλατάρος - Σάββατο, 22 Οκτωβρίου 2011, 05:02 ΜΜ**

Οποιονδήποτε στη σελίδα

Αν εκτελέσουμε την Ευκλείδεια διαίρεση 1: 3 βρίσκουμε πηλίκο 0 και υπόλοιπο 3

Η ταυτότητα της Ευκλειδείου διαιρέσεως είναι 1=0Χ3 +1 με 0<ή =1 και 1<3

**Η Ευκλείδεια διαίρεση έχει τελειώσει.**

Συνήθως όμως την συνεχίζουμε.......

Δεν αναλύω τον τρόπο , βρίσκουμε:

1/3 =0,33333333333333333333333333333333333.................................... (άπειρα τριάρια)

Αν μετρούσα στο τριαδικό σύστημα , θα χρησιμοποιούσα τα ψηφία 0,1, και 2 για να περιγράψω όλους τους υπάρχοντες (άπειρους) αριθμούς.

**Να μετρήσω:**

1 (ένα)

2 (δύο)

10 (τριάδα) τριάδα =3

11 (τριάδα ένα) 3+1=4

12 (τριάδα δύο) 3+2=5

20 (δυοτριάδα) 3+3=6

21 (δυοτριάδα ένα) 3+3+1 =7

22 (δυοτριάδα δύο) 3+3+2=8

100 (τριοτριάδα) 3+3+3=9

101 (τριοτριάδα ένα) 9+1=10



**[Πώς γράφεται το ρητός αριθμός 1/3 στο δεκαδικό και πώς στο τριαδικό;](#)**
**από [Ιωάννης Πλατάρος](#) - Σάββατο, 22 Οκτωβρίου 2011, 05:02 ΜΜ**

κτλ κτλ κτλ

κοκ κοκ κοκ

**Με τους δεκαδικούς τί κάναμε;**

Χωρίζαμε την μονάδα στα 10, 100, 1000. ίσα κομμάτια ($10^1$, $10^2$, $10^3$, κτλ )

Εδώ στο «τριαδικό σύστημα αριθμήσεως» θα χωρίζω την μονάδα σε 3, 9, 27, 81, κοκ ίσα κομμάτια ($3^1$, $3^2$ , $3^3$, $3^4$ , ....κοκ κομμάτια)

Δηλ., αν την μονάδα την χωρίσω σε τρία ίσα κομμάτια, κάθε ένα είναι «εκ κατασκευής» 1/3

Δηλ. το 1/3 όπως το γράφουμε στο δεκαδικό μας σύστημα, στο τριαδικό γράφεται 0,1 (ένα τρίτο)

Ομοίως τα 2/3 του δεκαδικού , θα γράφονται 0,2 (δύο τρίτα της μονάδας)

**Συμπέρασμα:** Αν ένας ρητός έχει περιοδική αναπαράσταση στο δεκαδικό σύστημα, σε ένα άλλο κατάλληλο σύστημα, μπορεί να έχει τερματιζόμενη, μη περιοδική αναπαράσταση.

[Το κριτήριο λόγου μας εξασφαλίζει περιοδικότητα, άρα άπειρη ανθυφαίρεση, άρα αρρητότητα!](#)
από [Ιωάννης Πλατάρος](#) - Τετάρτη, 26 Οκτωβρίου 2011, 07:23 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Έστησαν δύο μεγέθη α, β («έστω» δύο μεγέθη α, β ή «έστησαν» δύο μεγέθη α, β είναι το σωστό;)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρώ, ότι $\beta<\alpha$

Εκτελώ την ανθυφαίρεση μεταξύ των α και β

$\alpha=\pi_1\beta+\upsilon_1$

$\beta=\pi_2\upsilon_1+\upsilon_2$

$\upsilon_1=\pi_3\upsilon_2+\upsilon_3$

$\upsilon_2=\pi_4\upsilon_3+\upsilon_4$

$\upsilon_3=\pi_5\upsilon_4+\upsilon_5$

$\upsilon_4=\pi_6\upsilon_5+\upsilon_6$

$\upsilon_5=\pi_7\upsilon_6+\upsilon_7$

................

.................

$υ_ν=π_{ν+2}υ_{ν+1}+υ_{ν+2}$

Το παραπάνω είναι ένα κλασικό σχήμα περατούμενης ανθυφαίρεσης.

Δεν είναι να το μάθεις απ΄έξω, αλλά να βλέπεις, πώς από το ένα βήμα πάμε στο άλλο .

Να κάνουμε ορισμένες ερωτήσεις εμπέδωσης:

Το ν, υπονοεί έναν φυσικό αριθμό που εννοείται με τον τρόπο που κάνουμε τα βήματα.

Μιλάμε για τον κλασικό αλγόριθμο του Ευκλείδους, εξαγωγής του ΜΚΔ (α,β) (Ακριβώς το ίδιο θα γράφαμε!)

Πόσες σειρές έχω γράψει;

Απάντηση:

Επτά βήματα έχω γράψει, αλλά έχω και δύο σειρές με τελίτσες. Με αυτό τον ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ, εννοώ πόσες σειρές;

(Όχι επτά!)

Κοιτάω την τελευταία σειρά. Βλέπω το πρώτο που λέει $υ_ν$ Άρα έχω ν σειρές; Δεν έχω ν, αλλά ν+2 σειρές! (Για κοίτα από ξεκινάει η αρίθμηση: (α, β, $υ_1$, $υ_2$, $υ_3$, ....., $υ_ν$) Άρα όλα μαζί είναι ν+2

(Όποιος δεν το κατάλαβε, μου στέλνει μήνυμα)

Πριν μιλήσω για το «κριτήριο λόγου», να θυμηθούμε , ότι αν κάνουμε την διαίρεση

κ δια λ (λ<κ) , θα βρούμε κάποιο πηλίκο π και κάποιο υπόλοιπο υ

Αν έχω α έναν αριθμό ας πούμε θετικό, και κάνω την διαίρεση

ακ δια αλ , θα βρω τό ΙΔΙΟ πηλίκο π και το ίδιο υπόλοιπο υ .

Υπάρχει αντίρρηση;

κ/λ = ακ/αλ

Κοιτάμε τώρα το αρχικό σχήμα της ανθυφαίρεσης (Δεν μπορείς να το δεις καλά από την οθόνη, κάνε μια εκτύπωση!)

Είναι ν+2 σειρές (εννοούνται) από διαιρέσεις (ταυτότητες διαίρεσης)

Αν κοιτάξεις καλά τις διαιρέσεις, είναι όλες του τύπου $υ_κ/υ_{κ+1}$

Ας πούμε , αυτή, αντιστοιχεί στην διαίρεση

$υ_κ=π_{κ+2}\ υ_{κ+1}+\ υ_{κ+2}$

Μετά ας πούμε από ρ βήματα πάω στην διαίρεση

$\upsilon_{\kappa+\rho}=\pi_{\kappa+2+\rho}\,\upsilon_{\kappa+1+\rho}+\upsilon_{\kappa+2+\rho}$

(άλλα ρ στο πλήθος βήματα έκανα)

Ας πούμε τώρα, ότι ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΑ, ΟΤΙ

$\boldsymbol{\upsilon_\kappa/\upsilon_{\kappa+1}=\upsilon_\rho/\upsilon_{\rho+1}}$

Δηλ., μετά από ρ βήματα έχω την ΙΔΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ!

τι σημαίνει αυτό;

όσα πηλίκα έχω βρει από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ, ΤΑ ΙΔΙΑ ΘΑ ΒΡΩ ΑΝ ΣΥΝΕΧΙΣΩ ΤΗΝ ΔΙΑΙΡΕΣΗ! Δηλ. δεν χρειάζεται να την συνεχίσω πάρα κάτω, διότι θα βρίσκω διαρκώς τα ίδια πηλίκα, επαναληπτικά.

το ίδιο ΠΕΡΙΠΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ γίνεται όταν κάνω την διαίρεση 32 /7

=4,5714285714285714285714285714286.............(περίοδος το 571428)

Κάπου βγαίνει ΙΔΙΟ υπόλοιπο, άρα θα συνεχιστεί το ίδιο έργο.......

(κάντε τη με το χέρι να ΚΑΤΑΛΑΒΕΤΕ ΤΙ ΕΝΝΟΩ)

Στην ανθυφαίρεση βγαίνει Η ΙΔΙΑ (ουσιαστικά) διαίρεση, διότι έχω ΙΔΙΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ

Αν παρατηρήσω μια τέτοια αναλογία, δεν είναι ανάγκη να εκτελέσω διαιρέσεις μέχρι να σταματήσει η ανθυφαίρεση! Αφού βρήκα τον ίδιο λόγο, πάει να πει, ότι από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ θα ξαναπαίζεται το ίδιο έργο μέχρι να ξαναβρώ τον ίδιο λόγο κ.οκ. επ΄άπειρον!

ΔΗΛΑΔΗ, ΚΑΤΑΛΑΒΑΙΝΩ, ότι η ανθυφαίρεση ΔΕΝ σταματάει και συνεχίζεται επ΄άπειρον ΑΡΑ ΕΧΩ ΑΡΡΗΤΗ ΣΧΕΣΗ!

Ευτυχώς που υπάρχει αυτό το κριτήριο, αλλιώς θα συνέχιζα, χωρίς ΠΟΤΕ να γνωρίζω αν σταματάει ή δεν σταματάει!

Πράγματι, αν μετά μυρίων βασάνων έχω φθάσει στο λ.χ. 17ο βήμα μιας ανθυφαίρεσης που θα ξέρω αν σταματάει (έχω ρητή σχέση) ή δεν σταματάει (έχω άρρητη σχέση)

(Συνεχίζεται)



Το κριτήριο λόγου μας εξασφαλίζει περιοδικότητα, άρα άπειρη ανθυφαίρεση, άρα αρρητότητα!
από Ιωάννης Πλατάρος - Τετάρτη, 26 Οκτωβρίου 2011, 07:23 ΜΜ
Οποιονδήποτε στη σελίδα

Έστωσαν δύο μεγέθη α, β («έστω» δύο μεγέθη α, β ή «έστωσαν» δύο μεγέθη α, β είναι το σωστό;)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρώ, ότι $\beta<\alpha$

**Εκτελώ την ανθυφαίρεση μεταξύ των α και β**

$\alpha=\pi_1\beta+\upsilon_1$

$\beta=\pi_2\upsilon_1+\upsilon_2$

$\upsilon_1=\pi_3\upsilon_2+\upsilon_3$

$\upsilon_2=\pi_4\upsilon_3+\upsilon_4$

$\upsilon_3=\pi_5\upsilon_4+\upsilon_5$

$\upsilon_4=\pi_6\upsilon_5+\upsilon_6$

$\upsilon_5=\pi_7\upsilon_6+\upsilon_7$

................

.................

$\upsilon_\nu=\pi_{\nu+2}\upsilon_{\nu+1}+\upsilon_{\nu+2}$

**Το παραπάνω είναι ένα κλασικό σχήμα περατούμενης ανθυφαίρεσης.**

Δεν είναι να το μάθεις απ΄έξω, αλλά να βλέπεις, πώς από το ένα βήμα πάμε στο άλλο .

Να κάνουμε ορισμένες ερωτήσεις εμπέδωσης:

Το ν, υπονοεί έναν φυσικό αριθμό που εννοείται με τον τρόπο που κάνουμε τα βήματα.

Μιλάμε για τον κλασικό αλγόριθμο του Ευκλείδους, εξαγωγής του ΜΚΔ (α,β)

**Πόσες σειρές έχω γράψει;**

Απάντηση:

Επτά βήματα έχω γράψει, αλλά έχω και δύο σειρές με τελίτσες. Με αυτό τον ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ, εννοώ πόσες σειρές;

(Όχι πάντως επτά!)

Κοιτάω την τελευταία σειρά.

Βλέπω το πρώτο που λέει $\upsilon_\nu$

Άρα έχω ν σειρές;

Δεν έχω ν, αλλά ν+2 σειρές!

(Για κοίτα από ξεκινάει η αρίθμηση: ($\alpha$, $\beta$, $\upsilon_1$, $\upsilon_2$ , $\upsilon_3$, ....., $\upsilon_\nu$) Άρα όλα μαζί είναι ν+2

(Όποιος δεν το κατάλαβε, μου στέλνει μήνυμα)

Πριν μιλήσω για το ***«κριτήριο λόγου»***, να θυμηθούμε , ότι αν κάνουμε την διαίρεση

κ δια λ (λ<κ) , θα βρούμε κάποιο πηλίκο π και κάποιο υπόλοιπο υ

Αν έχω α έναν αριθμό ας πούμε θετικό, και κάνω την διαίρεση

ακ δια αλ , θα βρω τό ΙΔΙΟ πηλίκο π και το ίδιο υπόλοιπο υ .

Υπάρχει αντίρρηση;

$\kappa/\lambda = \alpha\kappa/\alpha\lambda$

Κοιτάμε τώρα το αρχικό σχήμα της ανθυφαίρεσης (Δεν μπορείς να το δεις καλά από την οθόνη, κάνε μια εκτύπωση!)

Είναι ν+2 σειρές (εννούνται) από διαιρέσεις (ταυτότητες διαίρεσης)

Αν κοιτάξεις καλά τις διαιρέσεις, είναι όλες του τύπου $\upsilon_\kappa/\upsilon_{\kappa+1}$

Ας πούμε , αυτή, αντιστοιχεί στην διαίρεση

$\upsilon_\kappa=\pi_{\kappa+2}\, \upsilon_{\kappa+1}+ \upsilon_{\kappa+2}$

Μετά ας πούμε από ρ βήματα πάω στην διαίρεση

$\upsilon_{\kappa+\rho}=\pi_{\kappa+2+\rho}\, \upsilon_{\kappa+1+\rho}+ \upsilon_{\kappa+2+\rho}$

(άλλα ρ στο πλήθος βήματα έκανα)

Ας πούμε τώρα, ότι ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΑ, ΟΤΙ

$\boldsymbol{\upsilon_\kappa/\upsilon_{\kappa+1}=\upsilon_\rho/\upsilon_{\rho+1}}$

Δηλ., μετά από ρ βήματα έχω την ΙΔΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ!

τι σημαίνει αυτό;

***Όσα πηλίκα έχω βρει από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ, ΤΑ ΙΔΙΑ ΘΑ ΒΡΩ ΑΝ ΣΥΝΕΧΙΣΩ ΤΗΝ ΔΙΑΙΡΕΣΗ! Δηλ. δεν χρειάζεται να την συνεχίσω πάρα κάτω, διότι θα βρίσκω διαρκώς τα ίδια πηλίκα, επαναληπτικά***.

Το ίδιο ΠΕΡΙΠΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ γίνεται όταν κάνω την διαίρεση 32 /7

=4,5714285714285714285714285714286............(περίοδος το 571428)

Κάπου βγαίνει ΙΔΙΟ υπόλοιπο, άρα θα συνεχιστεί το ίδιο έργο.......

(κάντε τη με το χέρι να ΚΑΤΑΛΑΒΕΤΕ ΤΙ ΕΝΝΟΩ)

Στην ανθυφαίρεση βγαίνει Η ΙΔΙΑ (ουσιαστικά) διαίρεση, διότι έχω ΙΔΙΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ

**Αν παρατηρήσω μια τέτοια αναλογία, δεν είναι ανάγκη να εκτελέσω διαιρέσεις μέχρι να σταματήσει η ανθυφαίρεση!** Αφού βρήκα τον ίδιο λόγο, πάει να πει, ότι από το βήμα ν μέχρι το βήμα ρ θα ξαναπαίζεται το ίδιο έργο μέχρι να ξαναβρώ τον ίδιο λόγο κοκ. επ΄άπειρον!

ΔΗΛΑΔΗ, ΚΑΤΑΛΑΒΑΙΝΩ, ότι η ανθυφαίρεση ΔΕΝ σταματάει και συνεχίζεται επ΄άπειρον ΑΡΑ ΕΧΩ ΑΡΡΗΤΗ ΣΧΕΣΗ!

Ευτυχώς που υπάρχει αυτό το κριτήριο, αλλιώς θα συνέχιζα, χωρίς ΠΟΤΕ να γνωρίζω αν σταματάει ή δεν σταματάει!

Πράγματι, αν μετά μυρίων βασάνων έχω φθάσει στο λ.χ. 17ο βήμα μιας ανθυφαίρεσης που θα ξέρω αν σταματάει (έχω ρητή σχέση) ή δεν σταματάει (έχω άρρητη σχέση)

*Το κριτήριο λόγου δεν το εξήγησα αυστηρά Μαθηματικά, αν και δεν είναι δύσκολη η εξήγησή του, δηλαδή, γιατί σε άλλα ρ βήματα θα βρώ ίδιο λόγο και σε άλλα ρ βήματα τον ίδιο λόγο κ.ο.κ.*

(Συνεχίζεται)

# ΕΦΑΡΜΟΖΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΕ ΕΝΑ ΦΥΛΛΟ ΧΑΡΤΙ $A_4$

***Γιάννης Π. Πλατάρος*** *, Καπετάν Κρόμπα 37, Τ.Κ. 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ*
*Ηλ. δ/ση: Plataros@sch.gr*

**Περίληψη:** *Στο πιο κοινό μέγεθος χαρτιού στον κόσμο , κρύβονται απροσδόκητα αρχαία μαθηματικά , τα οποία ανακαλύπτονται με «Γεωμετρία δια διπλώσεως» και τα οποία βασίζονται στο ότι το χαρτί $A_4$ διπλωνόμενο κατά μήκος παραμένει όμοιο προς εαυτόν όπως και στην «ανθυφαίρεση» του* $\sqrt{2}$ *με την μονάδα.*

**Εισαγωγή:** Η απαίτηση που έχομε από τα διάφορα μεγέθη χαρτιών φωτοτυπίας , είναι να είναι όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα , έτσι ώστε κατά την σμίκρυνση ή μεγέθυνση, να υπάρχει πλήρης χρησιμοποίηση και του μήκους και του πλάτους . Η σμίκρυνση ή η μεγέθυνση είναι ομοιοθεσίες και θα πρέπει το ομοιόθετο ενός σήματος να χωρά ακριβώς στο μεγαλύτερο ή μικρότερο χαρτί. Επιπρόσθετα, για λόγους οικονομίας στην κοπή των χαρτιών, απαιτούμε ένα χαρτί διπλωνόμενο κατά μήκος, να παραμένει όμοιο προς εαυτόν . Αυτή η απαίτηση, μας οδηγεί στο παρακάτω σχήμα και στην αναλογία:

x' x' x x x' x' Σχ.1

$$\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi}{\chi'} \Leftrightarrow \frac{\chi^2}{\chi'^2}=2 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{\chi}{\chi'}=\sqrt{2}$$

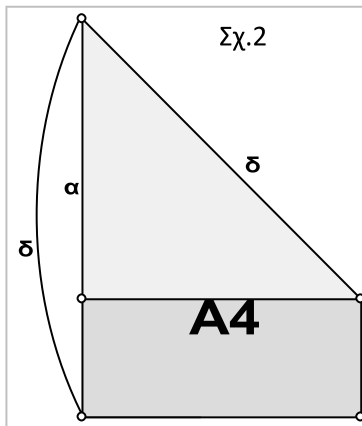
Σε κάθε νέα δίπλωση κατά μήκος (ή αντιστρόφως διπλασιασμό ) το νέο σχήμα διατηρείται όμοιο προς εαυτόν όπως φαίνεται στην ισότητα των λόγων:

$$\ldots=\frac{8\chi'}{4\chi}=\frac{4\chi'}{2\chi}=\frac{2\chi'}{\chi}=\frac{\chi'}{\chi/2}=\frac{\chi'/2}{\chi/4}=\ldots$$

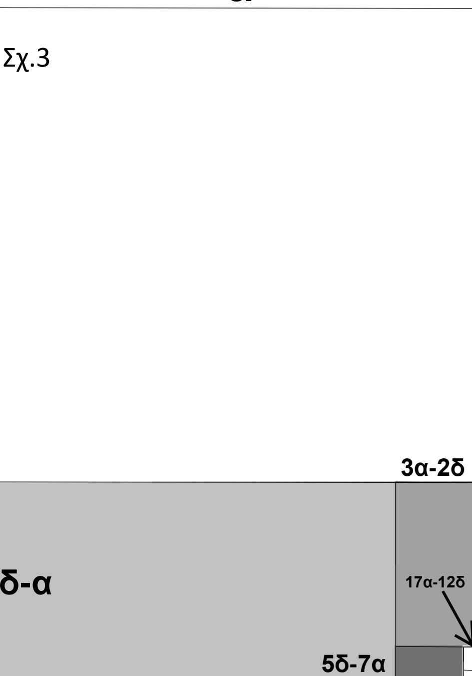
Έτσι, το διπλάσιο του φύλλου $A_4$ είναι το $A_3$ , το διπλάσιο του $A_2$ το μέγεθος $A_1$ . Αντιστρόφως, το ήμισυ του $A_4$ είναι το $A_5$ κ.ο.κ.

Στην μεγέθυνση μιας φωτοτυπίας $A_4$ σε $A_3$ εφαρμόζουμε μεγέθυνση $\sqrt{2}\,(\simeq 141\%)$ και αντιστρόφως σε σμίκρυνση $A_3$ σε $A_4$ εφαρμόζουμε σμίκρυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=(\simeq 70,7\%)$

**Κατασκευή του A4 :** Η σχέση (1) δείχνει λόγο πλευρών των οποίων τα τετράγωνα έχουν λόγο 2 . Αυτό παραπέμπει στον λόγο κάθετης και υποτείνουσας πλευράς σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ή ισοδυνάμως στην σχέση διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου. Επομένως , αν κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο και λάβουμε την διαγώνιό του ως την άλλη πλευρά σε παραλληλόγραμμο, έχομε κατασκευάσει ένα όμοιο με το A4 . Αν μάλιστα πάρουμε την μικρή πλευρά 210mm τότε η διαγώνιος θα είναι $\sqrt{2}\bullet 210mm \simeq 297mm$. Ως επαλήθευση μπορεί κανείς να διπλώσει ένα χαρτί A4 κατά την έννοια του διπλανού σχήματος σχηματίζοντας διπλωμένο τετράγωνο και να διαπιστώσει , με νέα δίπλωση, ότι η υποτείνουσα δ συμπίπτει με την μεγαλύτερη πλευρά του A4.




**Η Ανθυφαίρεση του A4 :** «*Ανθυφαίρεσις*» ή «*Ανταναίρεσις*» ή «*αμοιβαία αφαίρεσις*» , είναι ένας αρχαίος αλγόριθμος εύρεσης κοινού μέτρου (εφ΄ όσον υπάρχει) μεταξύ δύο (ομοειδών) μεγεθών . Στους ακεραίους αριθμούς, ο αλγόριθμος αυτός ταυτίζεται με την γνωστή μέθοδο του Ευκλείδους εξαγωγής Μ.Κ.Δ. , μεταξύ δύο αριθμών. Οι ακέραιοι έχουν πάντα κοινό μέτρο την μονάδα, ο σχετικός αλγόριθμος περατούται πάντα και άρα η σχέση μεταξύ δύο ακεραίων είναι ρητή. Αν όμως τα βήματα του αλγορίθμου συνεχίζονται επ΄ άπειρον, αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ των μεγεθών και ότι η σχέση τους είναι άρρητη *(«Στοιχεία» Ευκλείδους, Βιβλίο Χ , πρόταση 2 )*




<u>Περιγράφουμε τα βήματα του αλγορίθμου στο διπλανό σχήμα:</u>

(i.) το α , χωρά στο δ , 1 φορά και περισσεύει δ-α <α

(ii.) Το δ-α , χωρά στο α , 2 φορές και περισσεύει 3α-2δ<δ-α.

(iii.)Το 3α-2δ , χωρά στο δ-α , 2 φορές και περισσεύει 5δ-7α<3α-2δ

(iv.)Το 5δ-7α , χωρά στο 3α –2δ , 2 φορές και περισσεύει 17α – 12δ<5δ-7α

(v.)Το 17α –12δ , χωρά στο 5δ-7α , 2 φορές και περισσεύει 29δ-41α< 17α –12δ

Η Διαδικασία αυτή εκ πρώτης όψεως δεν ξέρουμε αν περατούται ή συνεχίζεται επ΄ άπειρον. Με διπλώσεις είναι πρακτικώς αδύνατον να ξεπεράσουμε το τέταρτο βήμα του αλγορίθμου , ενώ με αλγεβρικούς υπολογισμούς χρειάζεται να κάνουμε συνεχώς δοκιμές πράγμα που συνεχώς δυσκολεύει. Συνεπώς , για να αποφανθούμε για το άπειρο ή πεπερασμένο του αλγορίθμου, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο , το οποίο υπάρχει και πληρούται για την συγκεκριμένη περίπτωση. Λέγεται **«κριτήριο λόγου»** και θα δούμε πώς εφαρμόζεται. Παρατηρούμε, ότι $\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}(\Leftrightarrow 2\alpha^2=\delta^2 \text{ που ισχύει})$ . **Αυτό σημαίνει, ότι η ανθυφαιρετική σχέση από το βήμα (ii) έως το βήμα (iii) θα επαναλαμβάνεται η ίδια ,** δηλ. το τμήμα της με το ψηφίο 2. *(**«κριτήριο λόγου»**)* Με τις ιδιότητες των αναλογιών μπορούμε να το δούμε και ως εξής:

$$\frac{\delta-\alpha}{\alpha}=\frac{3\alpha-2\delta}{\delta-\alpha}=\frac{(\delta-\alpha)-2(3\alpha-2\delta)}{\alpha-2(\delta-\alpha)}=\frac{5\delta-7\alpha}{3\alpha-2\delta}=....=...=...$$

Αυτή η διαδικασία δίνει τα διαδοχικά υπόλοιπα του αλγορίθμου επ΄ άπειρον.

Έτσι, η ανθυφαιρετική σχέση πλευράς προς διαγώνιο δίνεται απ΄την σχέση:

Ανθφ(δ,α) =[1,2,2,2,2,2,2,….] η οποία είναι περιοδική με περίοδο το 2 και ουσιαστικά δίνει μια απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ .

Σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα , η αρχαία αλγοριθμική διαδικασία παριστάνεται από το συνεχές κλάσμα:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+...}}}}}=\kappa$$

Το κ υπάρχει και είναι το $\sqrt{2}$ (δηλ. ο άρρητος λόγος $\frac{\delta}{\alpha}$ ) και μπορεί να το διαπιστώσει κάποιος με αλγεβρικό χειρισμό (γνωρίζοντας όμως απαραιτήτως ότι το συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε πραγματικό) ως εξής:

**Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί:** Οι Αριθμοί που εμφανίζονται ως συντελεστές στα δ και α λέγονται «πλευρικοί» και «διαμετρικοί» αριθμοί αντιστοίχως , έχουν μελετηθεί από τους Πυθαγορείους και αναφορές σε αυτούς έχομε από τον Θέωνα τον Σμυρνέα (42-45)από τον Ιάμβλιχο στα Σχόλια εις Νικόμαχον τον Γερασινό. (91-93) , από τον Πλάτωνα στην Πολιτεία (546b) και από τον Πρόκλο στα σχόλιά του στην Πολιτεία του Πλάτωνος. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}=\kappa-1 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}=\frac{1}{\kappa-1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}=\frac{1}{\kappa-1}-2 \Leftrightarrow \kappa-1=\frac{1}{\kappa-1}-2\Leftrightarrow \kappa=\pm\sqrt{2}\ \mu\varepsilon\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \tau\eta\nu\ \sqrt{2}$$

Α) Είναι μέλη δύο ακολουθιών που ορίζονται με διπλό αναδρομικό τύπο, ως εξής: $\alpha_0=1$ , $\delta_0=1$ , $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\delta_\nu$ (1) κα . Οι πρώτοι 9 όροι των ακολουθιών είναι:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ : | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 | …… |
| $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ : | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | 577 | 1393 | ……. |

Β) Οι ακολουθίες συνδέονται με την λίαν ενδιαφέρουσα σχέση $2\alpha_\nu^2-\delta_\nu^2=(-1)^\nu\ \forall\,\nu\in\mathbb{N}$ (3) Πράγματι, αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη των (1) και (2) διπλασιάσουμε την πρώτη σχέση και αφαιρέσουμε κατά μέλη θα καταλήξουμε στην σχέση $2\alpha_{\nu+1}^2-\delta_{\nu+1}^2=-(2\alpha_\nu^2-\delta_\nu^2)=-(-1)^\nu=(-1)^{\nu+1}$ . Μάλιστα ο Πρόκλος (2.27.1-2.29.4) , αποδεικνύει την (3) κάνοντας χρήση της προτάσεως ΙΙ.10 των Στοιχείων του Ευκλείδους («***γλαφυρόν θεώρημα***») Το εξαιρετικά ενδιαφέρον είναι, ότι σύμφωνα με τους Van der Waerden Στυλιανό Νεγρεπόντη κ.ά. πρέπει να θεωρηθεί βέβαιον, ότι ο Ευκλείδης εγνώριζε την μέθοδο απόδειξης της τελείας επαγωγής. Ο Van der Waerden μάλιστα ισχυρίζεται, ότι ήταν γνωστή στους Πυθαγορείους καθώς και τον Ζήνωνα τον Ελεάτη (5$^{ος}$ αιώνας π.Χ.) . Τα επιχειρήματα είναι αρκετά και το κύριο των οποίων εστιάζεται στο ότι η πρόταση ΙΙ.10 αφ΄ ενός έχει μια εξαιρετικά εξεζητημένη ειδική διατύπωση και αφ΄ ετέρου δεν εφαρμόζεται πουθενά αλλού στα «Στοιχεία». Όμως, η ΙΙ.10 , συνιστά την απόδειξη της (3) στο βήμα «αποδεικνύω για ν= κ+1» της επαγωγικής μεθόδου.

Επίσης η (3) ισοδυναμεί με την σχέση $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}=\sqrt{2-\frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2}}$ (4) η οποία ορίζει μια νέα ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ . Μάλιστα όπως φαίνεται στο β΄μέλος της (4) , έχομε όρους που είναι διαδοχικές προσεγγίσεις εναλλάξ κατ΄ έλλειψιν και καθ΄ υπεροχήν του $\sqrt{2}$ και μάλιστα με σημαντική ταχύτητα. Παραστατικότερα αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

| $\delta_\nu/\alpha_\nu$ | 1 | 1,5 | 1,4 | 1,416 | 1,413 | 1,4142 | 1,41420 | 1,414215 | 1,4142131 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ =1.4142135623730950488016887242096980785696718753769481… | | | | | | | | | |

Επίσης ισχύει: $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ , $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{5}{7}$ , $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{12}{17}$ *κ.ο.κ.*

Σήμερα η (3) είναι μια μορφή της «*εξίσωσης του Pell*» που έχει θεμελιακή θέση στην θεωρία αριθμών. Ακόμα η $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται «*ακολουθία Pell*» καθώς και η $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ που είναι μια γενικότερη περίπτωσή της. Οι «*αριθμοί Pell*» συνδέονται με τους «*αριθμούς Lucas*» και με τους «*αριθμούς Fibonacci* » για κάθε περίπτωση των οποίων έχομε έναν απίστευτο όγκο παγκόσμιας βιβλιογραφίας . Σήμερα γνωρίζουμε ότι και για τις δύο ακολουθίες $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $\{\delta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ ισχύει ο ίδιος αναδρομικός τύπος : $\alpha_{\nu+2}=2\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$, απ΄ όπου με την βοήθεια της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε και τους γενικούς όρους , για την περίπτωσή μας: $\alpha_\nu=\frac{(1+\sqrt{2})^\nu-(1-\sqrt{2})^\nu}{2\sqrt{2}},\forall\,\nu\in\mathbb{N}$ και $\delta_\nu=\frac{(1+\sqrt{2})^\nu+(1-\sqrt{2})^\nu}{2},\forall\,\nu\in\mathbb{N}$

Δύο σχέσεις που συνδέουν τις ακολουθίες και που συνδέεται και με την ανθυφαίρεση, είναι η $\delta_\nu - \sqrt{2}\alpha_\nu = (-1)^\nu(\sqrt{2}-1)^\nu$ , $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\delta_\nu + \sqrt{2}\alpha_\nu = (\sqrt{2}+1)^\nu$ , $\forall \nu \in \mathbb{N}$ οι οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν την θεμελιώδη σχέση (3)

Μια γενική ανθυφαιρετική σχέση που συνδέει πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, είναι η ανθφ( $\alpha_\nu - \delta_\nu\sqrt{2}, 1) = [2\delta_\nu, 2\delta_\nu, 2\delta_\nu, 2\delta_\nu, 2\delta_\nu, ....]$

**Σειρές:** Απ ΄το σχήμα 3 , φαίνεται, ότι αν προσθέσω το εμβαδόν του πρώτου τετραγώνου και τα εμβαδά των απείρων ορθογωνίων που δημιουργούνται με την ανθυφαίρεση, θα πάρω το εμβαδόν του $A_4$. Δηλ.:

$$\alpha^2 + 2(\delta-\alpha)^2 + 2(3\alpha-2\delta)^2 + 2(5\delta-7\alpha)^2 + 2(17\alpha-12\delta)^2 + 2(29\delta-41\alpha)^2 + .... = \alpha\delta \text{ ή}$$

$$\alpha^2 + 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^\kappa \alpha_\kappa \delta + (-1)^{\kappa+1}\delta_\kappa \alpha]^2 = \alpha\delta . \ (5)$$

Επίσης, αν προσθέσουμε όλα τα μήκη των απείρων ορθογωνίων κατά την οριζόντια διεύθυνση έχομε το άπειρο άθροισμα ίσο με α Δηλ.

$$2(\delta-\alpha) + 2(5\delta-7\alpha) + 2(29\delta-41\alpha) + .... = \alpha \text{ ή } 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta - \delta_{2\kappa}\alpha) = \alpha \ (6)$$

Επίσης το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων κατά την κατακόρυφη έννοια, είναι δ-α , δηλαδή:

$$2(3\alpha-2\delta) + 2(17\alpha-12\delta) + 2(99\alpha-70\delta) + ... = \delta-\alpha \text{ ή } 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha - \alpha_{2\kappa+1}\delta) = \delta-\alpha \ (7)$$

Οι ισότητες (6) και (7) , με πρόσθεση κατά μέλη , δίνουν το άθροισμα όλων των μηκών των απείρων ορθογωνίων:

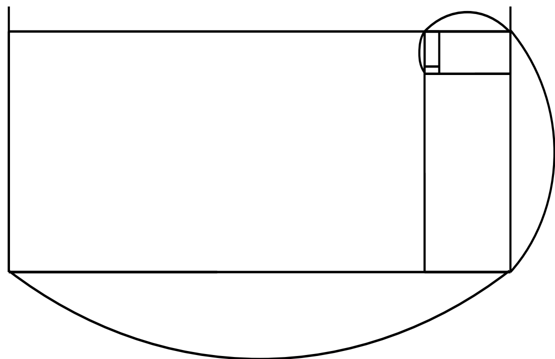
$$2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha - \alpha_{2\kappa+1}\delta) + 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta - \delta_{2\kappa}\alpha) = \delta - \alpha + \alpha \Leftrightarrow$$

$$2[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\delta_{2\kappa+1}\alpha - \alpha_{2\kappa+1}\delta) + \sum_{\kappa=0}^{\infty}(\alpha_{2\kappa}\delta - \delta_{2\kappa}\alpha)] = \delta \Leftrightarrow 2\sum_{\kappa=0}^{\infty}[(-1)^\kappa\alpha_\kappa\delta + (-1)^{\kappa+1}\delta_\kappa\alpha] = \delta$$

Σε όλα τα ανωτέρω, μπορεί ο αναγνώστης να θεωρεί α=1 και δ=$\sqrt{2}$ .

Επειδή η σύγκλιση των σειρών παρουσιάζεται εποπτικά, μπορεί να δικαιολογηθεί και θεωρητικά με αρχαίο κριτήριο σύγκλισης των «Στοιχείων» του Ευκλείδους την περίφημη «μέθοδο εξαντλήσεως» *(Χ.1)* σύμφωνα με την οποία, αν από ένα μέγεθος αποκοπεί τμήμα μεγαλύτερο του ημίσεως και από το εναπομένον αποκοπεί τμήμα πάλι μεγαλύτερο του ημίσεως και αυτό γίνεται συνεχώς, τότε μετά από πεπερασμένα βήματα, το εναπομένον, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό. Το κριτήριο πληρούται τόσο για τα «αποκοπτόμενα ορθογώνια» από το $A_4$ , όσο και για τα «αποκοπτόμενα μήκη» των ορθογωνίων.

**Καμπύλες:** Αν τα προκύπτοντα ορθογώνια κατά την ανθυφαίρεση τα διατάξουμε με κυκλική φορά, κάνοντας τις διαιρέσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω, τότε οι κορυφές των ορθογωνίων ευρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **εσώστρεφος ηλιοτροπική,** επειδή οι σπόροι του ηλιοτροπίου είναι τοποθετημένοι στο άνθος του σύμφωνα με μια τέτοια καμπύλη , η οποία έχει άμεση σχέση και με τους αριθμούς Fibonacci.



**Συμπεράσματα:** Για άλλη μια φορά φαίνεται, ότι τα μαθηματικά είναι «εφαρμοζόμενα» σε κάθε πτυχή του επιστητού αλλά και της καθημερινότητας , είναι μπροστά στα μάτια μας και μοιάζουν με «λαχείο ξυστό» Το μόνο που χρειάζεται είναι να ξύσουμε για να αποκαλυφθούν. Το αν θα είναι και εφαρμοσμένα εξαρτάται από την «τύχη» μας και βεβαίως από τις ανθρώπινες ανάγκες μας

**Βιβλιογραφική αναφορά:**

1) Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά» στο Παν. Αθηνών ,χειμερινό εξάμηνο 2001-02 διδάσκων Στυλιανός Νεγρεπόντης .

2) Ευάγγελου Σ. Σταμάτη «Ευκλείδους Στοιχεία» τ. I, II , III. Ο.ΕΔ.Β

3) Ευκλείδη Στοιχεία τ. 2 , έκδοση Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Αθήνα 2001

4)Εξαρχάκου Θεοδώρου «Η αρχαία Ελλάδα κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης» Πρακτικά 17ου Συνεδρίου ΕΜΕ Αθήνα 2000.

5) http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html

6) http://users.tellurian.net/hsejar/maths/pell/
7) http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html

**Abstract:** In the most common size of paper in the world, there are included hidden ancient mathematics, which can be discovered with the «Geometry though folding». These are based in the fact that the paper folded in length remains similar to itself, as well as in the «anthyphaeresis» of $\sqrt{2}$ with the unit

*1ο ΓΕΛ Μεσσήνης* *Τετάρτη 05 Οκτωβρίου 2011*

*Α΄Λυκείου.* *Ομάδα 1*

*Μάθημα: Ερευνητική Εργασία στα Μαθηματικά, για στην ανακάλυψη της αρρητότητας*

## Δραστηριότητες Εβδομάδας:

**1.** Να αναζητηθεί η πολυσημία του όρου **«λόγος»** Τι σημαίνει στα νέα Ελληνικά, τι σημαίνει στα Αρχαία Ελληνικά. Να αναζητηθούν τα αντίθετα , τα παράγωγα και να οριοθετηθεί τα νόημα τη λέξης το μαθηματικό από τις άλλες σημασίες όπως του «ορθού λόγου» της «ομιλίας» σε σχέση με την έννοια «σχέση» Διαβάστε το προοίμιο (τι είναι το «προοίμιο;») του *κατά Ιωάννην Ευαγγελίου (Κεφ.1, 1-4)* και αντικαταστήστε την λέξη **«λόγος»** με την λέξη **«σχέση»**

2. Να εκτελέσετε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και 1 ως προς τα 5 πρώτα βήματα.
*Υπόμνηση: Όταν ο Ευκλείδειος αλγόριθμος μεταξύ δύο μεγεθών περατώνεται, τα δύο μεγέθη έχουν κοινό μέτρο. Όταν δεν περατώνεται, τα δύο ομοειδή μεγέθη (αριθμοί, ευθύγραμμα τμήματα κτλ ) δεν έχουν κοινό μέτρο. Γεννάται όμως η απορία: Πώς θα ξέρουμε αν τελειώνει ή δεν τελειώνει ο αλγόριθμος; Κι αν τελειώνει σε 100.000 βήματα, φθάνει η ζωή ενός ανθρώπου να τα εκτελέσει; Μήπως υπάρχει κάτι τι που να μας επιτρέπει να αποφανθούμε αν τελειώνει ή όχι; Το ερώτημα το κρατάμε ανοικτό μέχρι στιγμής….*

3. Είναι γνωστό, ότι ο ευκλείδειος αλγόριθμος εύρεσης ΜΚΔ δύο φυσικών, **είναι ταυτόσημος** με την διαδικασία της ανθυφαίρεσης. Να βρείτε ποια σχέση έχει αυτός ο αλγόριθμος με τα **«συνεχή κλάσματα»** Αφού βρείτε την σχέση, να γράψετε τα κλάσματα $\frac{120}{15}$ και $\frac{1000}{480}$ ως συνεχή κλάσματα.

# Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης

Λέγοντας τον όρο **«διδακτικά (ή και γνωστικά) εμπόδια»** εννοούμε τα **επιστημολογικά εμπόδια**[1] που όταν μπαίνουν στην διδακτική πρακτική ονομάζονται έτσι. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, ένα διδακτικό εμπόδιο είναι η ίδια η ετυμολογία της λέξης αφού νοηματοδοτικά παραπέμπει σε μια ευθεία που **«τείνει να γίνει εφαπτόμενη στην καμπύλη στο άπειρο»** ως μια ευθεία **«που πλησιάζει στο άπειρο το γράφημα της συνάρτησης χωρίς να το ακουμπά»** τέλος πάντων, η ετυμολογία παραπέμπει σίγουρα σε **«μια ευθεία που δεν ακουμπά την συνάρτηση»** . Να επαναλάβουμε, ότι αυτές οι πληροφορίες, δεν βγαίνουν από τον μαθηματικό ορισμό της έννοιας της ασύμπτωτης, αλλά από την ίδια την λέξη –όρο –έτυμον «ασύμπτωτη» Να μην ξεχνάμε, ότι η ίδια η λέξη, προϋπάρχει της μαθηματικής έννοιας Ένας μαθητής κάλλιστα μπορεί να την γνωρίζει και να την έχει καταχωρίσει στο μυαλό του με την σωστή σημασία.[2] Η μαθηματική σημασία για να καταχωριστεί επιτυχώς **εκ νέου**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

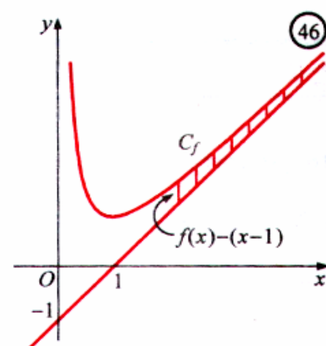
Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

- Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x}$$

και η ευθεία

$$g(x)=x-1 \quad (\Sigma\chi.\ 46).$$




Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, καθώς το $x$ τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της $f$ προσεγγίζουν τις τιμές της $g$. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της $f$ προσεγγίζει την ευθεία $y=x-1$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y=x-1$ είναι **ασύμπτωτη (πλάγια)** της $C_f$ στο $+\infty$. Γενικά:

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

Η ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda=0$, ενώ αν $\lambda\neq0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

Για τον προσδιορισμό των ασυμπτώτων μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}.$$

---

[1] Τα επιστημολογικά εμπόδια ( *obstacles épistémologiques* ) είναι εσωτερικές αναπαραστάσεις που περιέχουν το προφανώς σωστό . Σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμες αλλά τελικώς απενεργοποιούν την διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης

[2] Ένας Αγγλόφωνος μαθητής δεν έχει κανένα τέτοιο πρόβλημα, αφού οι όροι asymptotic , asymptote δεν του λένε τίποτα από απόψεως ετυμολογικής αφού απλούστατα είναι Ελληνικές!

στον εγκέφαλο, ως ένα **νέο γνωστικό σχήμα που να τροποποιεί το προϋπάρχον παλαιό**, προϋποθέτει μια **γνωστική σύγκρουση** η οποία κατ΄ ουδένα τρόπο προσφέρεται με το σχήμα του βιβλίου . Το σχήμα εντείνει την παραμονή του **πρότερου προϋπάρχοντος γνωστικού σχήματος** δεν συμβάλλει στην σωστή τροποποίησή του , ενώ αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί με την παράθεση και ενός άλλου σχήματος όπου λ.χ. μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, έχει άπειρα κοινά σημεία με την ασύμπτωση και μάλιστα αν θεωρήσω Μ>0 οσοδήποτε μεγάλο και τον περιορισμό της f στο [M,+∞ ] η $f$ με την ασύμπτωτη να έχει άπειρα κοινά σημεία .

Το βιβλίο του ΟΕΔΒ μάλιστα διασαφηνίζει- ώστε να μην υπάρχει καμμία παρανόηση εκ μέρους των μαθητών- ότι **«…η γραφική παράσταση της f , <u>προσεγγίζει</u> την ευθεία y=……»** (βλέπε παραπλεύρως) Για την έννοια της «προσέγγισης» το σχήμα που παρατίθεται μιλά από μόνο του και βεβαίως καλύπτει την έννοια της ασύμπτωτης **αυστηρά και μόνο για την συγκεκριμένη συνάρτηση.** Το σχήμα αυτό δεν καλύπτει όλες τις κλάσεις , αφού υπάρχει μία τουλάχιστον άλλη κλάση συναρτήσεων κάθε αντιπρόσωπος της οποίας , έχει κοινά σημεία (πεπερασμένα ή άπειρα) με τις ασύμπτωτες . Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{Bmatrix} x+\frac{1}{x}\sin x^2, \alpha\nu\ \ \chi\neq 0 \\ 0\ ,\alpha\nu\ \ \chi=0\end{Bmatrix}$ η οποία επιδέχεται ως πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty\ \kappa\alpha\acute{\iota} +\infty$ την y=χ

.Πράγματι:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}\sin x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2}\sin x^2)=1+0=0$$

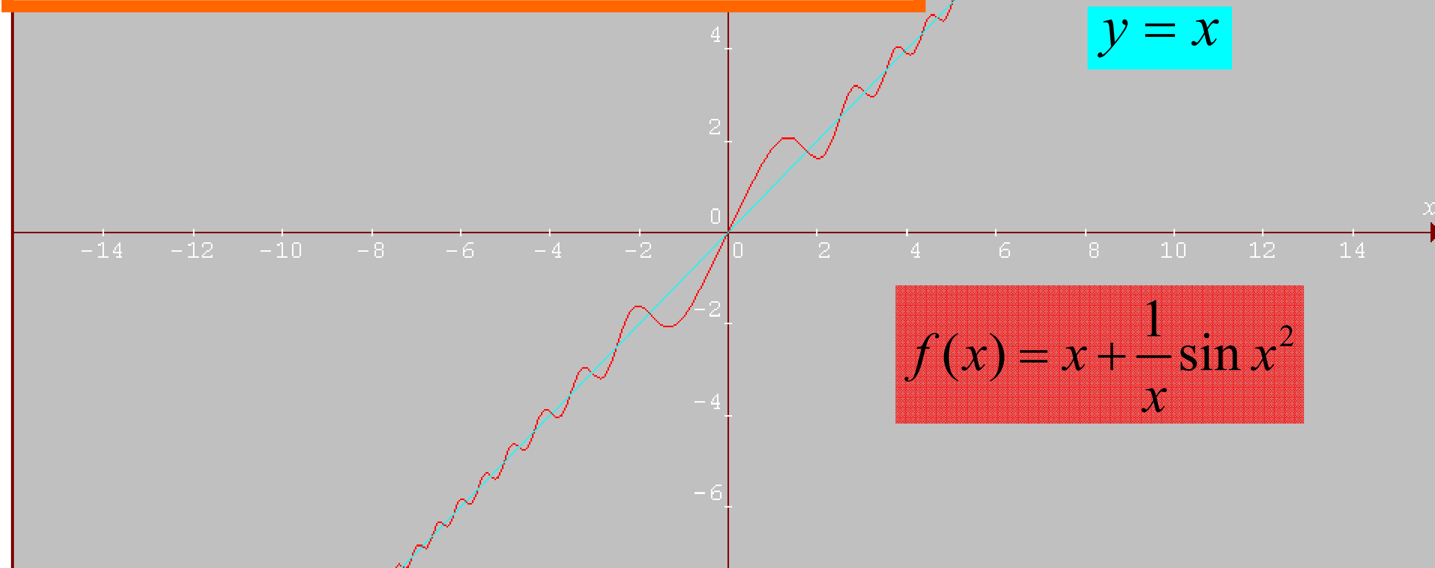
Ενώ $\beta=\lim_{x\to\infty}(f(\chi)-\alpha\chi)=\lim_{x\to\infty}(\chi+\frac{1}{\chi}\sin\chi^2-\chi)=0$

Η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}\sin x^2$ επιδέχεται στο $-\infty\ \kappa\alpha\acute{\iota} +\infty$ ως πλαγία ασύμπτωτη την y=x , η οποία έχει με την συνάρτηση άπειρα κοινά σημεία.
Πράγματι, η επίλυση της εξίσωσης *f(x)=x , δίνει:*

$$\frac{1}{x}\sin x^2=0 \underset{\frac{1}{x}\neq 0}{\Leftrightarrow} \sin x^2=0 \Leftrightarrow \sin x^2=\sin 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2=2k\pi+0 \\ x^2=(2k+1)\pi-0\end{Bmatrix}, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (x^2=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{\kappa\pi}, \kappa\in\mathbb{N}\ \delta\eta\lambda.\acute{\varepsilon}\chi\omega\ \acute{\alpha}\pi\varepsilon\iota\rho\alpha\ \kappa o\iota\nu\acute{\alpha}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha.$$



**Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, αλλά η $f(x)$ να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη.**

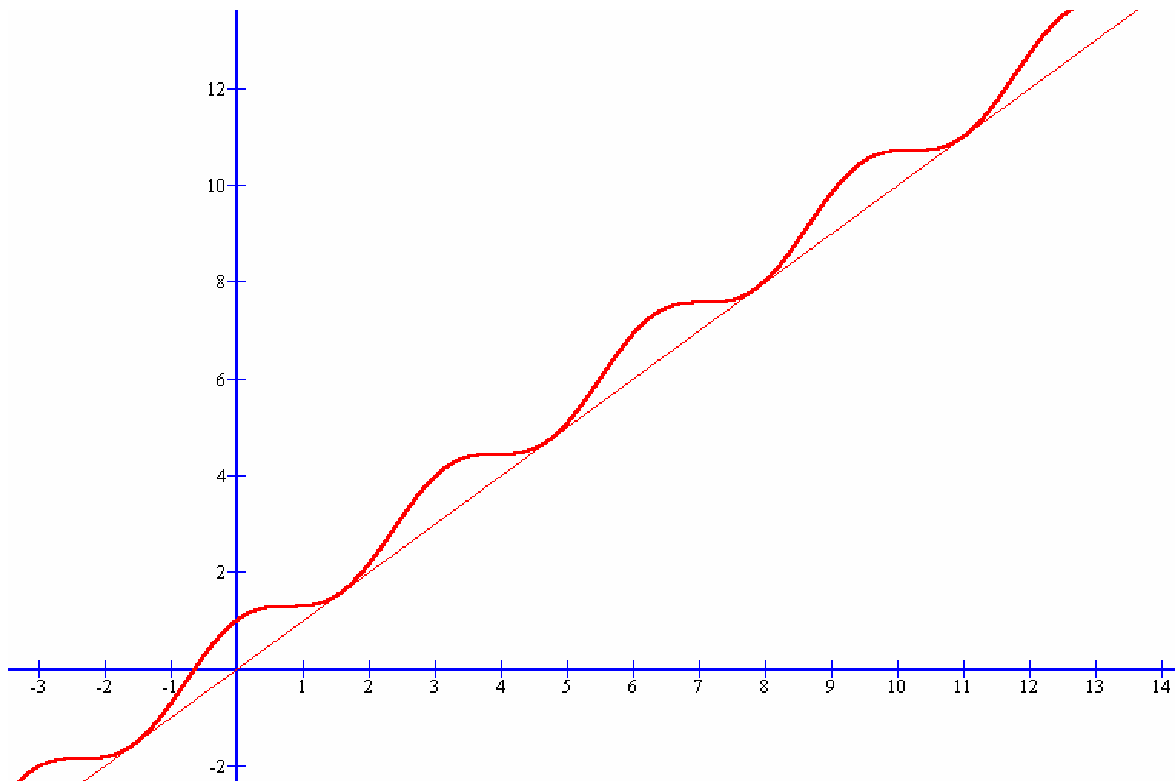
**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**: Αν π.χ. $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x/\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)=1+0=1$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω $x_n=2n\pi\to+\infty$, τότε

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 2n\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}1^2=1$, ενώ αν

$y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$.

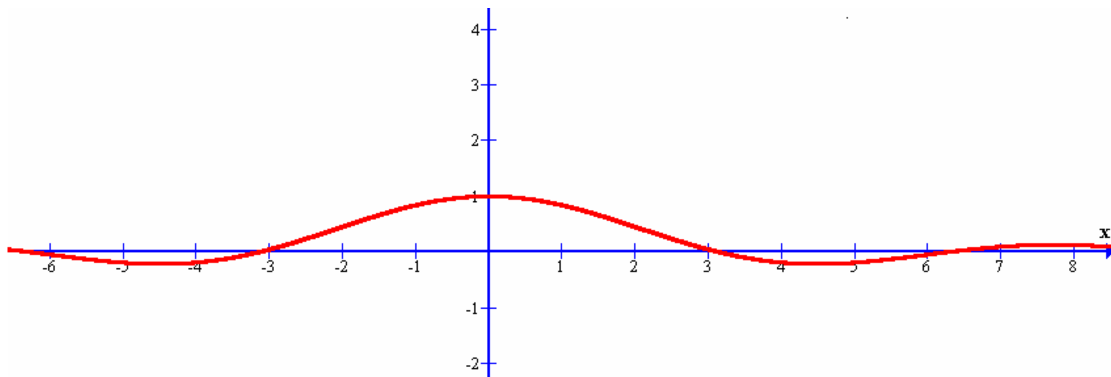



**Η γραφική παράσταση της $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x$ εφάπτεται σε άπειρα σημεία με την ευθεία y=x , αλλά δεν υπάρχει διάστημα της μορφής [Μ, $+\infty$) ή (-$\infty$ ,-Μ] (με Μ>0 , και Μ οσοδήποτε μεγάλο) έτσι ώστε σε αυτό το διάστημα η μεταξύ τους απόσταση να τείνει στο 0**

Ένα άλλο παράδειγμα με οριζόντια ασύμπτωτη αυτή τη φορά είναι το παρακάτω:

Θεωρώ την $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ γι αυτήν ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η ευθεία $y$=0 (δηλαδή ο άξονας $xx'$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $f(x)$.

Όμως η $f(x)$ και ο άξονας $xx'$ έχουν άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία, αφού η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x}=0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=0 \Leftrightarrow (x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z})$ και έτσι φαίνεται η απειρία των κοινών σημείων.




**Να σημειώσουμε, ότι η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **είναι παντού συνεχής και έχει την μορφή μιας αποσβενυόμενης φθίνουσας ταλάντωσης και προς το $+\infty$ και προς το $-\infty$, όπως φαίνεται στην παραπάνω γραφική της παράσταση**

**Τελικά , η σύγχυση της έννοιας «ασύμπτωτη συνάρτησης» εκτός από την ετυμολογική σημασία της λέξης «ασύμπτωτη» (και δευτερογενώς από υπάρχουσες ελλιπείς εικόνες στα εγχειρίδια ή ελλιπή παραδείγματα) προέρχεται και από κάπου αλλού;**

**Απάντηση:**

Ναι, υπάρχει και μια άλλη πηγή της σύγχυσης αυτής , απόλυτα φυσιολογική. Αυτή η πηγή, είναι η έννοια της **«κατακόρυφης ασύμπτωτης»** όπου εκεί, **όντως η κατακόρυφη ασύμπτωτη, «πλησιάζει οσοδήποτε κοντά την συνάρτηση χωρίς να την τέμνει!»**

Αυτό συμβαίνει **εξ ορισμού της κατακορύφου ασύμπτωτης συνάρτησης** και ουσιαστικά **συνιστά την γεωμετρική σημασία των** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ $\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$.

Ένα πρόχειρο επιχείρημα στην ερώτηση ***«γιατί κύριε η κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν είναι δυνατόν να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης»*** και η εις άτοπον απαγωγή: «Αν την έτεμνε τότε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)$ θα ήταν πεπερασμένο και ίσο με το $f(x_0)$ , αλλά έχομε πει ότι υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες , όταν το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ απειρίζεται.»

# Συνόψιση όλων των παραπάνω:

**Που έγκεινται τα διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης;**

**Απάντηση:**

- Στην ελληνική ετυμολογία της λέξης «ασύμπτωτη»
- Στην έλλειψη καταλλήλου παραδείγματος στο διδακτικό βιβλίο.
- Στο ότι όλες οι κατακόρυφες ασύμπτωτες εξ ορισμού δεν μπορούν να τέμνουν το διάγραμμα μιας συνάρτησης.

**Πώς αίρονται τα παραπάνω εμπόδια;**

**Απάντηση:**

- Με έντονη επισήμανση, έντονο τονισμό, ότι μπορεί η έννοια να λέγεται «ασύμπτωτη», αλλά την λέξη την διάλεξαν ξένοι για λογαριασμό μας, εμείς την μεταγράψαμε φυσιολογικά στην γλώσσα μας, αλλά σε μας σημαίνει την μη έχουσα κοινά μέρη με την συνάρτηση!. Όμως, από τον μαθηματικό ορισμό της έννοιας αυτό είναι δυνατό !
- Με την ύπαρξη –τοποθέτηση στο διδακτικό βιβλίο τουλάχιστον ενός παραδείγματος ασυμπτώτου που έχει κοινά σημεία και μάλιστα άπειρα με το διάγραμμα της συνάρτησης . Το παράδειγμα να είναι τόσο χαρακτηριστικό, όπου αν θεωρήσω M>0 οσοδήποτε μεγάλο και τον περιορισμό της f στο $[M,+\infty]$ η $f$ με την ασύμπτωτη να έχει άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία .
- Στην επισήμανση στο βιβλίο, ότι **μόνο** στην έννοια της κατακόρυφης ασύμπτωτης η ασύμπτωτη δεν είναι δυνατόν να έχει κοινά σημεία με την συνάρτηση.

# Γεωμετρικά υποδείγματα συναρτήσεων .

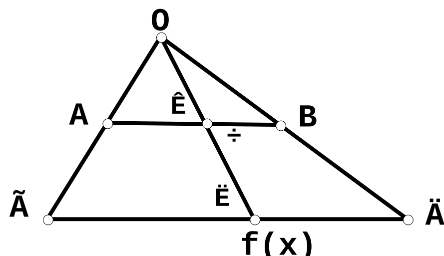
**Ιωάννης Π. Πλατάρος**
Μαθηματικός , Καπετάν Κρόμπα 37 , Τ.Κ. 24 200 ΜΕΣΣΗΝΗ
ηλ./ταχ. Plataros@sch.gr

**Περίληψη**
*Κάποια απλά υποδείγματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούν να δείξουν την ύπαρξη απεικονίσεων μεταξύ ευθ. τμημάτων, ευθειών , ημιευθιών , τόξων κύκλων κ.τ.λ. οι οποίες έχουν εξαιρετικό ενδιαφέρον καθ΄ εαυτές και επάγουν σε αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις. Έτσι , συνδέεται περισσότερο η Ευκλείδεια Γεωμετρία και με τις συναρτήσεις, πράγμα που συμβάλει στην ανάδειξη του ενιαίου της συνέχειας και της συνεκτικότητας των μαθηματικών κλάδων.*

**Εισαγωγή**
Στο Λύκειο, υπάρχουν κλασικά προβλήματα , όπως. π.χ. μεγίστων και ελαχίστων στα εμβαδά , τα οποία μπορούν να επιλυθούν με γεωμετρικές, αλγεβρικές ή και αναλυτικές μεθόδους και να φανεί η ενότητα των τριών κλάδων των μαθηματικών , οι διαφορές τους καθώς και τα πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα κάθε μιας. Π.χ. το πρόβλημα της εύρεσης του παραλληλογράμμου με μέγιστο εμβαδόν, από όλα όσα έχουν σταθερή περίμετρο, μπορεί να επιλυθεί και με τις τρεις μεθόδους. Ωστόσο , ένα τμήμα ύλης που θα συνέδεε την κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία απ΄ ευθείας με τις απεικονίσεις και ιδία τις συναρτήσεις δεν υπάρχει στα βιβλία της Μέσης εκπαίδευσης .Αν εξαιρέσουμε τις κλασικές απεικονίσεις «συμμετρία ως προς κέντρο» , «συμμετρία ως προς σημείο» «στροφή» και «μεταφορά» (όπου κι αυτές παρουσιάζονται χωρίς ιδιαίτερες επεκτάσεις και εφαρμογές) κάτι άλλο δεν υπάρχει και μια τέτοια απόπειρα θα κάνουμε με την παρούσα εργασία.

**Πρόβλημα Ι.**
***Να βρεθεί συνάρτηση $f:[a,\beta]\to[\gamma,\delta]$ η οποία να είναι «1-1» και «επί»***

Στο παρακάτω σχήμα [1] έχω $AB // \Gamma\Delta$ και φαίνεται , ότι κάθε σημείο του ευθ. τμήματος ΑΒ απεικονίζεται ένα και μόνο ένα σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ και αντιστρόφως. Έτσι έχω μια «1-1» και «επί» απεικόνιση



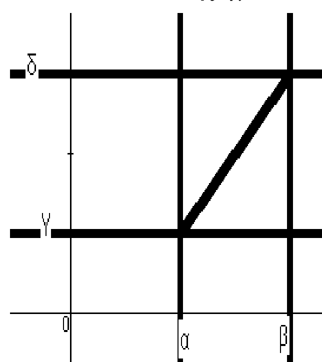



$Σχήμα 1.$

του ΑΒ στο ΓΔ. Αν θεωρήσω το ΑΒ ως το [α,β] και το ΓΔ ως [γ,δ] , τότε από τα όμοια τρίγωνα ΟΑΚ &ΟΓΛ έχω $\frac{ΟΑ}{ΟΓ}=\frac{ΑΚ}{ΓΛ}=\frac{\chi-\alpha}{f(x)-\gamma}$ (1)

Από τα όμοια τρίγωνα ΟΑΒ & ΟΓΔ , έχω: $\frac{ΟΑ}{ΟΓ}=\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma}$ (2) Από (1)&(2) κάνοντας τις πράξεις , έχω τελικά ότι $f(x)=\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}(\chi-\alpha)+\gamma$

$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 2.




Χωρίς το γεωμετρικό πρότυπο των ομοίων τριγώνων αλλά στο πεδίο γραφικής παράστασης, θα μπορούσαμε να δούμε την εξίσωση της διαγωνίου ως μία λύση στο πρόβλημα και να την βρούμε ως τμήμα ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία (α,γ) και (β,δ) και η οποία ως γνησίως μονότονη είναι «1-1» και «επί» . Αντί του γραφήματος της διαγωνίου, θα μπορούσε να είναι το γράφημα οποιασδήποτε «1-1» συνάρτησης (συνεχούς ή μη) που διέρχεται από τα προηγούμενα σημεία ή τα σημεία (α,δ) και (β,γ).

Έτσι, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι η δεύτερη θεώρηση υπερκαλύπτει το αρχικό γεωμετρικό πρότυπο, όμως, το αρχικό προσφέρεται διδακτικά για τα εξής:

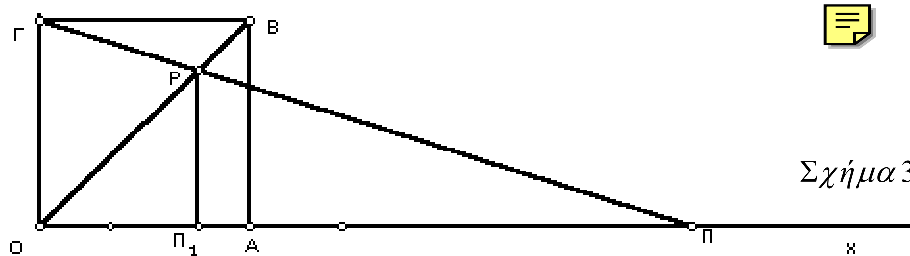
- Δείχνει την έννοια της απεικόνισης ως φυσική επέκταση της συνάρτησης σε μη αριθμητικά σύνολα
- Δείχνει, ότι το πλήθος των σημείων όλων των ευθυγράμμων τμημάτων είναι το ίδιο , πράγμα μη προφανές και που δεν προκύπτει διαισθητικά , μιας και στα απειροσύνολα έχουν άλλους νόμους από αυτούς των πεπερασμένων που αντιλαμβάνονται συνήθως οι άνθρωποι. Εννοείται ότι πρέπει να έχει γίνει μια γενικότερη νύξη για το πώς η ισοπληθικότητα μεταξύ δύο συνόλων πεπερασμένων ή απείρων ουσιαστικά φανερώνεται από μια «1-1» και «επί» απεικόνιση μεταξύ τους.
- Με ένα δυναμικό εκπαιδευτικό λογισμικό που έχει κίνηση , όπως είναι το Cabri ή το Sketchpad μπορούμε να δείξουμε πάρα πολύ καλά, ότι καθώς το χ διαγράφει το ΑΒ, η εικόνα του *f(x)* διαγράφει το ΒΓ. Παράλληλα μπορεί να γίνει και η γραφική παράσταση του μήκους ΓΛ*(:=f(x)* ) ως συνάρτηση του μήκους ΓΔ(:=x) που είναι ευθ. τμήμα.

**Πρόβλημα ΙΙ.**

***Να βρεθεί συνάρτηση*** $f:[a,\beta)\to[a,+\infty)$ ***που να είναι***

***«1-1» και «επί»***

Στο παρακάτω σχήμα εμφανίζεται η απεικόνιση του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ στην ημιευθεία Οχ . [2]




$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\, 3.$

Στο τυχόν σημείο $Π_1$ του ΟΑ , υψώνουμε κάθετο, η οποία τέμνει την διαγώνιο του τετραγώνου ΟΑΒΓ στο Ρ. Η προέκταση της ΓΡ , τέμνει την Οχ στο Π , που είναι η εικόνα του $Π_1$.

Αν τώρα ταυτίσομε το ΟΑ με το [α,β) , την Οχ με το [α,+∞) , το $Π_1$ με το x και το Π με το *f(x)* , τότε από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΟΠΓ και $Π_1ΠΡ$ , έχομε την ισότητα λόγων

$$\frac{ΟΠ}{ΟΠ-ΟΠ_1}=\frac{ΟΓ}{ΡΠ_1}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{f(x)-x}=\frac{\beta-\alpha}{x} \qquad (1)$$

Από την (1) τελικά παίρνουμε ότι $f(x)=\dfrac{(\beta-\alpha)x}{\beta-\alpha-x}$ που είναι η ζητούμενη αναλυτική έκφραση .

Ας δούμε τώρα τα πιθανά οφέλη της εφαρμογής αυτής:

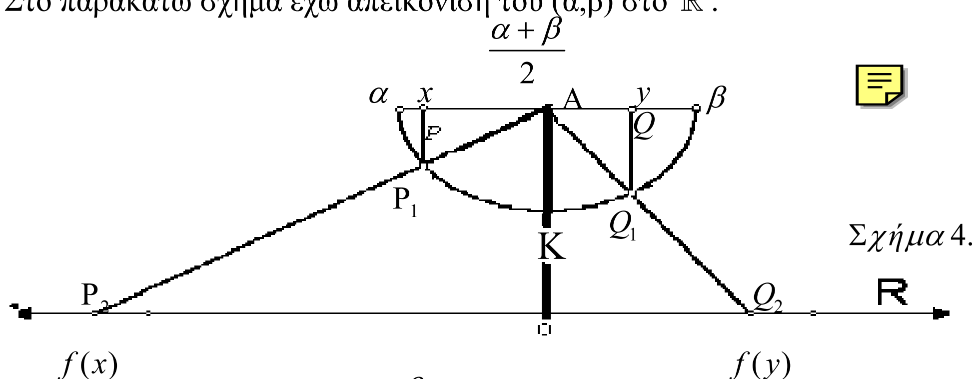
- Η δικαιολόγηση του γιατί έχουμε απεικόνιση μέσω αυτής της διαδικασίας. Γεωμετρικά είναι ίσως τετριμμένη, (δύο ευθείες του επιπέδου όταν δεν είναι παράλληλες τέμνονται σε μοναδικό σημείο) αλλά συμβάλλει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της απεικόνισης.
- Φανερώνει στους μαθητές το εκπληκτικό και πέραν της συνήθους διαισθήσεως αποτέλεσμα, ότι το πεπερασμένου μήκους ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ , έχει τα ίδια σημεία με την απείρου μήκους ημιευθεία.
- Με χρήση των Sketchpad ή Cabri , εκτός του να δειχθεί η απεικόνιση και η αντίστοιχη συνάρτηση με δυναμικό τρόπο, μπορεί να δειχθεί και

ότι το όριο του χ τείνοντος στο α , είναι το $+\infty$, κατ΄ απολύτως εποπτικό τρόπο. Δηλ. ακριβώς στο α έχω παραλληλία και άρα δεν έχω εικόνα του χ, αλλά οσοδήποτε κοντά στο α , έχω εικόνα , η οποία γίνεται οσοδήποτε μεγάλη.

**Πρόβλημα ΙΙΙ.**

***Να βρεθεί συνάρτηση*** $f:(\alpha,\beta)\rightarrow \mathbb{R}$ ***που να είναι «1-1» και «επί»*** [3],[4]

Στο παρακάτω σχήμα έχω απεικόνιση του (α,β) στο $\mathbb{R}$ :




$\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha$ 4.

Το μέσον του τμήματος $\frac{\alpha+\beta}{2}$ απεικονίζεται στο 0 , τα δε τυχαία x και y στα *f(x) , f(y)* αντιστοίχως. Από τα όμοια τρίγωνα $APP_1$ και $P_2OA$ έχω τους λόγους μηκών των αντιστοίχως τμημάτων:

$$\frac{-f(x)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\chi}=\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\chi\right)^2}},$$

απ΄ όπου παίρνω την αναλυτική έκφραση της $f$ *δηλ.* $f(x)=\dfrac{\mathrm{K}\left(\chi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sqrt{(\chi-\alpha)(\beta-\chi)}}$ (*)

Πιθανά οφέλη της εφαρμογής θα μπορούσαν να είναι:

- Η εκπληκτική ανακάλυψη ότι τα σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος και μιας ευθείας είναι ισοπληθικά.
- Το ίδιο το γεγονός της αλγοριθμικής κατασκευής οικογένειας συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ανοικτό και πεπερασμένο διάστημα και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ .
- Η κατασκευή του σχήματος σε περιβάλλον Cabri ή Sketchpad, θα δείξει -όπως και προηγουμένως- εξαιρετικά εποπτικά την

απεικόνιση, την αντίστοιχη συνάρτηση και ακόμη ότι η $f$ απειρίζεται θετικά ή αρνητικά καθώς το χ τείνει στο β ή στο α , αντιστοίχως.

**Μία γενίκευση**

Αν θελήσει κάποιος να προβεί σε γενικεύσεις και αντί ημικυκλίου στο Σχήμα.4 θέσει μια άλλη γνωστή συνάρτηση με τα ίδια άκρα και στο ίδιο ημιεπίπεδο, τότε θα πάρει μια άλλη συνάρτηση . Για να είναι η νέα συνάρτηση «1-1» χρειάζονται επί πλέον συνθήκες.

Στο Σχήμα 3 , αντί της διαγωνίου ΟΒ , θα μπορούσα να θέσει το γράφημα μιας γν. αύξουσας συνεχούς συνάρτησης στο [α,β) με τα ίδια άκρα

Κάτι ανάλογο μπορεί να γίνει και στο Σχήμα1 , αν αντικατασταθεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με γράφημα συνάρτησης ή όταν $AB \nparallel \Gamma\Delta$ και να διερευνηθούν ανάλογα ερωτήματα. (Τα δυναμικά λογισμικά προσφέρονται για σχετικό πειραματισμό)

**Συμπεράσματα**

Τα τρία προβλήματα που παραθέσαμε, αναδεικνύουν μια σύνδεση σε δύο περιοχές των μαθηματικών , όπως είναι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και των συναρτήσεων. Αυτή η ενότητα είναι προφανής όταν μεσολαβεί η Αναλυτική Γεωμετρία. Αλλά. το πώς π.χ με την βοήθεια ομοίων τριγώνων βρίσκω συνάρτηση με επιθυμητές ιδιότητες , δεν μπορεί να προκύψει άμεσα από την ύλη του Λυκείου. Επίσης η χρήση δυναμικών εκπαιδευτικών λογισμικών στην παρουσίαση των εφαρμογών αυτών μπορεί να αποδώσει εποπτικότερα την έννοια της σύγκλισης , αλλά και να αναδείξει παράπλευρες έννοιες, όπως του περιορισμού συνάρτησης και του εφικτού ή όχι της συνεχούς επέκτασης συνάρτησης (π.χ. όταν τα ανοικτά διαστήματα των προβλημάτων τα θεωρήσουμε ως κλειστά )

Μια σοβαρή γενικότερη πιθανή ωφέλεια που προσλαμβάνει ο μαθητής, είναι η διεύρυνση του πλαισίου (contex) αναφοράς των συναρτήσεων μέσω των τριών αυτών προβλημάτων.

**Αναφορές:**

[1] **Vilenkin Yak. Naum** : *«Αναζητώντας το άπειρο»* Εκδόσεις Κάτοπτρο σελ. 102-103

[2] **Morris Kline** *«Τα Μαθηματικά στον Δυτικό Πολιτισμό»* Τ.Β΄ εκδόσεις «Κώδικας» σελ. 259

[3] **Δρόσος Κώστας Α**. *«Εισαγωγή στην Μαθηματική Σκέψη»* Τόμος 1ος Μαθηματικές Περιηγήσεις –Τμήμα Μαθηματικών Παν. Πατρών.

[4] **Rucker Rudy** : *«Το άπειρο και ο νους»* Παν. Εκδόσεις Κρήτης Ηράκλειο 1999 σελ. 269-270

# Ανθυφαίρεση των ριζών των αριθμών 3, 13 , 19 με την μονάδα

Στην επίλυση αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό :

$\alpha = \kappa_0\beta + \alpha_1$
$\beta = \lambda_0\alpha_1 + \beta_1$
..............
$\alpha_\nu = \kappa_\nu\beta_\nu + \alpha_{\nu+1}$
$\beta_\nu = \lambda_\nu\alpha_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}$

με $\alpha>\beta>\alpha_1>\beta_1>.....>\alpha_\nu>\beta_\nu>.....$

και $Αν\theta(\alpha,\beta)=[\kappa_0,\lambda_0,...,\kappa_\nu,\lambda_\nu,...]$

**(i) Αν $\alpha^2 = 3\beta^2$, παίρνουμε**

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=1$ τότε $\alpha = 1\beta + \alpha_1$
άρα $\beta<\alpha<2\beta$
ή $\beta^2<\alpha^2<4\beta^2$
ή $\beta^2<3\beta^2<4\beta^2$ , κάτι που είναι ορθό

ακόμη από $\alpha = 1\beta + \alpha_1$ παίρνουμε $\alpha_1 = \alpha-\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=1$ τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$

άρα $\alpha_1<\beta<2\alpha_1$
ή $\alpha-\beta<\beta<2(\alpha-\beta)$
ή $\alpha-\beta<\beta$ και $\beta<2(\alpha-\beta)$
ή $\alpha<2\beta$ και $3\beta<2\alpha$
ή $\alpha^2<4\beta^2$ και $9\beta^2<4\alpha^2$
ή $3\beta^2<4\beta^2$ και $9\beta^2<12\beta^2$
τα οποία ισχύουν.

τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$ ¤ $\beta_1 = \beta- \alpha_1$ ¤ $\beta_1 = \beta- (\alpha-\beta)$ ¤ $\beta_1 = 2\beta - \alpha$

υποθέτουμε ότι κ1=1 τότε $\alpha_1 = 1\beta_1 + \alpha_2$

άρα $\beta_1 < \alpha_1 < 2\beta_1$
ή $2\beta - \alpha < \alpha - \beta < 2(2\beta - \alpha)$
ή $2\beta - \alpha < \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta < 4\beta - 2\alpha$
ή $3\beta < 2\alpha$ και $3\alpha < 5\beta$
ή $9\beta^2 < 4\alpha^2$ και $9\alpha^2 < 25\beta^2$
ή $9\beta^2 < 12\beta^2$ και $27\beta^2 < 25\beta^2$
ισχύει άτοπο

υποθέτουμε ότι κ1=2 τότε $\alpha_1 = 2\beta_1 + \alpha_2$

άρα $2\beta_1 < \alpha_1 < 3\beta_1$
ή $2(2\beta - \alpha) < \alpha - \beta < 3(2\beta - \alpha)$
ή $4\beta - 2\alpha < \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta < 6\beta - 3\alpha$
ή $5\beta < 3\alpha$ και $4\alpha < 7\beta$
ή $25\beta^2 < 9\alpha^2$ και $16\alpha^2 < 49\beta^2$
ή $25\beta^2 < 27\beta^2$ και $48\beta^2 < 49\beta^2$
ορθό ορθό

τότε $\alpha_1 = 2\beta_1 + \alpha_2$ ¤ $\alpha_2 = 3\alpha - 5\beta$

υποθέτουμε λ1=1 τότε $\beta_1 = 1\alpha_2 + \beta_2$

άρα $\alpha_2 < \beta_1 < 2\alpha_2$
ή $3\alpha - 5\beta < 2\beta - \alpha < 2(3\alpha - 5\beta)$
ή $3\alpha - 5\beta < 2\beta - \alpha$ και $2\beta - \alpha < 6\alpha - 10\beta$
ή $4\alpha < 7\beta$ και $12\beta < 7\alpha$
ή $16\alpha^2 < 49\beta^2$ και $144\beta^2 < 49\alpha^2$
ή $48\beta^2 < 49\beta^2$ και $144\beta^2 < 147\beta^2$
τα οποία ισχύουν

τότε $\beta_1 = 1\alpha_2 + \beta_2$ ‹ $\beta_2 = 7\beta - 4\alpha$

Όμως ισχύει $\beta / \alpha_1 = \beta_1 / \alpha_2$ ‹ $\alpha^2 = 3\beta^2$ αληθές
Επομένως από το κριτήριο λόγου η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, και έχουμε Ανθ(α, β) = [1, <u>1,2</u> ]
Για τα οκτώ πρώτα ζεύγη των γενικευμένων πλευρικών- διαμετρικών αριθμών έχουμε

$p_1 = 1$ $q_1 = k_0 = 1$

$p_2 = \lambda_0 = 1$ $q_2 = 1 + k_0\lambda_0 = 2$

$p_3 = k_1 p_2 + p_1 = 3$ $q_3 = k_1 q_2 + q_1 = 5$

$p_4 = \lambda_1 p_3 + p_2 = 4$ $q_4 = \lambda_1 q_3 + q_2 = 7$

$p_5 = k_2 p_4 + p_3 = 11$ $q_5 = k_2 q_4 + q_3 = 19$

$p_6 = \lambda_2 p_5 + p_4 = 15$ $q_6 = \lambda_2 q_5 + q_4 = 26$

$p_7 = k_3 p_6 + p_5 = 41$ $q_7 = k_3 q_6 + q_5 = 71$

$p_8 = \lambda_3 p_7 + p_6 = 56$ $q_8 = \lambda_3 q_7 + q_6 = 97$

Στηριζόμενοι στη θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών- διαμετρικών αριθμών, για κάθε διαδοχικά ζεύγη αριθμών, έχουμε

$p_2 q_1 - p_1 q_2 = -1 = (-1)^1$
$p_3 q_2 - p_2 q_3 = 1 = (-1)^2$
$p_4 q_3 - p_3 q_4 = -1 = (-1)^3$
$p_5 q_4 - p_4 q_5 = 1 = (-1)^4$
$p_6 q_5 - p_5 q_6 = -1 = (-1)^5$
$p_7 q_6 - p_6 q_7 = 1 = (-1)^6$
$p_8 q_7 - p_7 q_8 = -1 = (-1)^7$

**(ii) Όταν $\alpha^2 = 13\beta^2$ θα έχουμε**

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=1$, τότε $\alpha = 1\beta + \alpha_1$

τότε $\beta<\alpha<2\beta$
ή $\beta^2< \alpha^2<4\beta^2$
ή $\beta^2<13\beta^2 <4\beta^2$ , Άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=2$, τότε $\alpha=2\beta+\alpha_1$

τότε $2\beta<\alpha<3\beta$
ή $4\beta^2< \alpha^2<9\beta^2$
ή $4\beta^2<13\beta^2 <9\beta^2$ , Άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=3$, τότε $\alpha=3\beta+\alpha_1$

τότε $3\beta<\alpha<4\beta$
ή $9\beta^2<\alpha^2<16\beta^2$

ή $9\beta^2<13\beta^2<16\beta^2$ αληθές

άρα $\alpha=3\beta+\alpha_1$ ‹ $\alpha_1=\alpha-3\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=1$, τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$

τότε $\alpha_1<\beta<2\alpha_1$
ή $\alpha_1<\beta<2\alpha_1$
ή $\alpha-3\beta<\beta<2\alpha-6\beta$
ή $\alpha<4\beta$ και $7\beta<2\alpha$
ή $\alpha^2<16\beta^2$ και $49\beta^2<4\alpha^2$
ή $13\beta^2<16\beta^2$ και $49\beta^2<52\beta^2$ ισχύουν

άρα $\beta=1\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=4\beta-\alpha$

υποθέτουμε ότι $\kappa_1=1$, τότε $\alpha_1=1\beta_1+\alpha_2$

άρα $\beta_1<\alpha_1<2\beta_1$
ή $\beta_1<\alpha_1<2\beta_1$
ή $4\beta-\alpha<\alpha-3\beta<8\beta-2\alpha$
ή $7\beta<2\alpha$ και $3\alpha<11\beta$
ή $49\beta^2<4\alpha^2$ και $9\alpha^2<121\beta^2$
ή $49\beta^2<52\beta^2$ και $117\beta^2<121\beta^2$ , ορθές

επιπλέον $\alpha_1=\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=2\alpha-7\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_1=1$, τότε $\beta_1=1\alpha_2+\beta_2$

έτσι $\alpha_2<\beta_1<2\alpha_2$
ή $2\alpha-7\beta<4\beta-\alpha<4\alpha-14\beta$
ή $3\alpha<11\beta$ και $18\beta<5\alpha$
ή $9\alpha^2<121\beta^2$ και $324\beta^2<25\beta^2$
ή $117\beta^2<121\beta^2$ και $324\beta^2<325\beta^2$ ,που ισχύουν

άρα $\beta_1=1\alpha_2+\beta_2$ ‹ $\beta_2=11\beta-3\alpha$

υποθέτουμε ότι $κ_2=1$, τότε $α_2 = β_2 + α_3$

άρα $β_2<α_2<2β_2$

ή $11β - 3α<2α - 7β<22β - 6α$

ή $18β< 5α$ και $8α<29β$

ή $324β^2<325β^2$ και $832β^2<841β^2$ ,ορθές

τότε $α_2=β_2 + α_3 < α_3=5α - 18β$

υποθέτουμε ότι $λ_2=1$, τότε $β_2=α_3 + β_3$

άρα $α_3<β_2<2α_3$

ή $5α - 18β<11β - 3α<2(5α - 18β)$

ή $8α<29β$ και $47β<13α$

ή $832β^2<841β^2$ και $2209β^2<2197β^2$ ,άτοπο

Ομοίως για $λ_2=2$ ή 3 ή 4 ή 5 καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $λ_2=1$, τότε $β_2=6α_3 + β_3$

έτσι $6α_3<β_2<7α_3$

ή $30α - 108β<11β - 3α<35α - 126β$

ή $33α<119β$ και $137β<38α$

ή $14157β^2<14161β^2$ και $18769β^2<18772β^2$ ,οι οποίες ισχύουν

ακόμη $β_2=α_3 + β_3 < β_3 =119β - 33α$

υποθέτουμε ότι κ3=1, τότε $α_3 = β_3 + α_4$

έτσι $β_3<α_3<2β_3$

ή $119β - 33α<5α - 18β<238β - 66α$

ή $137β<38α$ και $71α<256β$

ή $18769β^2<18772β^2$ και $65533β^2<65536β^2$

επιπλέον $α_3 = β_3 + α_4 < α_4=38α - 137β$

Όμως ισχύει $\beta / \alpha_1 = \alpha_3/\beta_3 < \beta*\beta_3=\alpha_1*\alpha_3 < 13\beta^2=\alpha^2$ , αληθές
Επομένως από το κριτήριο λόγου η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, και έχουμε Ανθ(α, β) = $[3,\underline{1,1,1,1,6}]$

Για τα οκτώ πρώτα ζεύγη των γενικευμένων πλευρικών- διαμετρικών αριθμών έχουμε

$p_1 = 1$ $q_1 = k_0=3$

$p_2 = \lambda_0 = 1$ $q_2 = 1 + k_0\lambda_0 =4$

$p_3 = k_1p_2 +p_1 =2$ $q_3 = k_1q_2 + q_1 =7$

$p_4 = \lambda_1p_3 +p_2 =3$ $q_4 = \lambda_1q_3 + q_2=11$

$p_5 = k_2p_4 +p_3 =5$ $q_5 = k_2q_4 + q_3 =18$

$p_6 = \lambda_2p_5 + p_4=33$ $q_6 = \lambda_2q_5 + q_4 =119$

$p_7 = k_3p_6 + p_5 =38$ $q_7 = k_3q_6 + q_5 =137$

$p_8 = \lambda_3p_7 + p_6 =71$ $q_8 = \lambda_3q_7 +q_6=256$

Στηριζόμενοι στη θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών- διαμετρικών αριθμών, για κάθε διαδοχικά ζεύγη αριθμών, έχουμε

$p_2q_1 - p_1q_2 =-1 = (-1)^1$
$p_3q_2 - p_2q_3 = 1 = (-1)^2$
$p_4q_3 - p_3q_4 = -1 = (-1)^3$
$p_5q_4 - p_4q_5 = 1 = (-1)^4$
$p_6q_5 - p_5q_6 = -1 = (-1)^5$
$p_7q_6 - p_6q_7 = 1 = (-1)^6$
$p_8q_7 - p_7q_8 = -1 = (-1)^7$

**(iii) Όταν $\alpha^2 =19\beta^2$ θα έχουμε**

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=1$, τότε $\alpha =1\beta + \alpha_1$

άρα $\beta<\alpha<2\beta$
ή $\beta^2<\alpha^2<4\beta^2$

ή $\beta^2<19\beta^2<4\beta^2$ ,άτοπο

ομοίως για $\kappa_0=2$ ή 3 καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_0=4$, τότε $\alpha = 4\beta + \alpha_1$

έτσι $4\beta<\alpha<5\beta$
ή $16\beta^2<\alpha^2<25\beta^2$ αληθές

επιπλέον $\alpha = 4\beta + \alpha_1$ ‹ $\alpha_1 = \alpha - 4\beta$

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=1$, τότε $\beta=1\alpha_1+\beta_1$

άρα $\alpha_1<\beta< 2\alpha_1$
ή $\alpha - 4\beta <\beta<2(\alpha - 4\beta)$
ή $\alpha - 4\beta <\beta$ και $\beta< 2\alpha - 8\beta$
ή $\alpha<5\beta$ και $9\beta<2\alpha$
ή $\alpha^2<25\beta^2$ και $81\beta^2<4\alpha^2$
ή $19\beta^2< 25\beta^2$ και $81\beta^2< 76\beta^2$ , άτοπο

υποθέτουμε ότι $\lambda_0=2$, τότε $\beta = 2\alpha_1 + \beta_1$

άρα $2\alpha_1<\beta< 3\alpha_1$
ή $2\alpha - 8\beta<\beta$ και $\beta< 3\alpha - 12\beta$
ή $2\alpha<9\beta$ και $13\beta<3\alpha$
ή $4\alpha^2<81\beta^2$ και $169\beta^2<9\alpha^2$
ή $76\beta^2< 81\beta^2$ και $169\beta^2< 171\beta^2$ , ισχύουν

επομένως $\beta=2\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=9\beta-2\alpha$

υποθέτουμε ότι $\kappa_1=1$, τότε $\alpha_1 = \beta_1 + \alpha_2$

άρα $\beta_1<\alpha_1<2\beta_1$
ή $9\beta - 2\alpha< \alpha -4\beta< 18\beta - 4\alpha$
ή $13\beta<3\alpha$ και $5\alpha<22\beta$
ή $169\beta^2<9\alpha^2$ και $25\alpha^2< 484\beta^2$
ή $169\beta^2<171\beta^2$ και $475\beta^2<484\beta^2$ , που είναι ορθές

ακόμη $\alpha_1=\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=3\alpha-13\beta$

αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1=1$ ή 2 καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\lambda_1=3$, τότε $\beta_1 = 3\alpha_2 + \beta_2$

άρα $3\alpha_2<\beta_1<4\alpha_2$
ή $9\alpha - 39\beta< 9\beta - 2\alpha < 12\alpha - 52\beta$
ή $11\alpha< 48\beta$ και $61\beta< 14\alpha$
ή $121\alpha^2< 2304\beta^2$ και $3721\beta^2< 196\alpha^2$
ή $2299\beta^2< 2304\beta^2$ και $3721\beta^2< 3724\beta^2$ , που ισχύουν

ακόμη $\beta_1 = 3\alpha_2 + \beta_2$ ‹ $\beta_2 = 48\beta - 11\alpha$

υποθέτουμε ότι $\kappa_2=1$, τότε $\alpha_2 = \beta_2 + \alpha_3$

αφού $\beta_2< \alpha_2<2\beta_2$
ή $48\beta - 11\alpha< 3\alpha - 13\beta< 96\beta - 22\alpha$
ή $61\beta< 14\alpha$ και $25\alpha< 109\beta$
ή $3721\beta^2< 196\alpha^2$ και $625\alpha^2<11881\beta^2$
ή $3721\beta^2< 3724\beta^2$ και $11875\beta^2<11881\beta^2$ , που ισχύουν

επίσης $\alpha_2 = \beta_2 + \alpha_3$ ‹ $\alpha_3=14\alpha - 61\beta$

αν υποθέσουμε ότι $\lambda_2=1$, τότε καταλήγουμε σε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\lambda_2=2$, τότε $\beta_2 = 2\alpha_3 + \beta_3$

άρα $2\alpha_3< \beta_2<3\alpha_3$
ή $28\alpha - 122\beta< 48\beta - 11\alpha< 42\alpha - 183\beta$
ή $39\alpha<170\beta$ και $231\beta<53\alpha$
ή $1521\alpha^2<28900\beta^2$ και $53361\beta^2<2809\alpha^2$
ή $28899\beta^2<28900\beta^2$ και $53361\beta^2<53371\beta^2$ , που ισχύουν

έχουμε $\beta_2 = 2\alpha_3 + \beta_3$ ‹ $\beta_3=170\beta-39\alpha$

αν υποθέσουμε ότι $\kappa_3$=1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 7, καταλήγουμε άτοπο

υποθέτουμε ότι $\kappa_3=8$, και παίρνουμε $\alpha_3 = 8\beta_3 + \alpha_4$

άρα $8\beta_3<\alpha_3<9\beta_3$
ή $1360\beta-321\alpha<14\alpha - 61\beta<1530\beta-351\alpha$
ή $1421\beta<326\alpha$ και $365\alpha<1591\beta$
ή $2019241\beta^2<106276\alpha^2$ και $133225\alpha^2<2531281\beta^2$
ή $2019241\beta^2<2019244\beta^2$ και $2531275\alpha^2<2531281\beta^2$

έχουμε $\alpha_3 = 8\beta_3 + \alpha_4$ ‹ $\alpha_4=326\alpha-1421\beta$

Όμως ισχύει $\beta / \alpha_1 = \beta_3/\alpha_4$ ‹ $\beta*\alpha_4=\alpha_1*\beta_3$ ‹ $19\beta^2=\alpha^2$ , αληθές
Επομένως από το κριτήριο λόγου η ανθυφαίρεση των α, β είναι άπειρη, και έχουμε Ανθ(α, β) = [4,2,1,3,1,2,8] (με υπογράμμιση στο 2,1,3,1,2,8)

Για τα οκτώ πρώτα ζεύγη των γενικευμένων πλευρικών- διαμετρικών αριθμών έχουμε

$p_1 = 1$ $\quad$ $q_1 = k_0=4$

$p_2 = \lambda_0 =2$ $\quad$ $q_2 = 1 + k_0\lambda_0 =9$

$p_3 = k_1p_2 +p_1 =3$ $\quad$ $q_3 = k_1q_2 + q_1 =13$

$p_4 = \lambda_1p_3 +p_2 =11$ $\quad$ $q_4 = \lambda_1q_3 + q_2=48$

$p_5 = k_2p_4 +p_3 =14$ $\quad$ $q_5 = k_2q_4 + q_3 =61$

$p_6 = \lambda_2p_5 + p_4=39$ $\quad$ $q_6 = \lambda_2q_5 + q_4 =170$

$p_7 = k_3p_6 + p_5 =326$ $\quad$ $q_7 = k_3q_6 + q_5 =1421$

$p_8 = \lambda_3p_7 + p_6 =691$ $\quad$ $q_8 = \lambda_3q_7 +q_6=3012$

Στηριζόμενοι στη θεμελιώδη ιδιότητα των πλευρικών- διαμετρικών αριθμών, για κάθε διαδοχικά ζεύγη αριθμών, έχουμε

$p_2q_1 - p_1q_2 =-1 = (-1)^1$
$p_3q_2 - p_2q_3 = 1 = (-1)^2$
$p_4q_3 - p_3q_4 = -1 = (-1)^3$

$p_5q_4 - p_4q_5 = 1 = (-1)^4$
$p_6q_5 - p_5q_6 = -1 = (-1)^5$
$p_7q_6 - p_6q_7 = 1 = (-1)^6$
$p_8q_7 - p_7q_8 = -1 = (-1)^7$

# Εύρεση ισοδυναμιών επί γενικευμένων ανθυφαιρέσεων

**(i)** Ξέρουμε ότι Ανθ(α,β)=$[\nu,\underline{2\nu}]$

τότε $\alpha=\nu\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta_1=\beta-2\nu(\alpha-\nu\beta)=\beta-2\nu\alpha+2\nu^2\beta$ ‹ $\boldsymbol{\beta_1=(1+2\nu^2)\beta-2\nu\alpha}$

Ανθ(α,β)=$[\nu,\underline{2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\alpha_1/\beta_1}$ ‹ $\beta\beta_1=\alpha_1\alpha_1$
‹ $\beta[(1+2\nu^2)\beta-2\nu\alpha]= (\alpha-\nu\beta)\,(\alpha-\nu\beta)$
‹ $(1+2\nu^2)\beta^2-2\nu\alpha\beta=\alpha^2-2\nu\alpha\beta+\nu^2\beta$
‹ $\boldsymbol{\alpha^2=(1+\nu^2)\,\beta^2}$

**(ii)** Ξέρουμε ότι Ανθ(α,β)=$[\nu,\underline{\nu,\ 2\nu}]$

τότε $\alpha=\nu\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta=\nu\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta-\nu\alpha_1=\beta-\nu(\alpha-\nu\beta)$
$=\beta-\nu\alpha+\nu^2\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta1=(1+\nu^2)\beta-\nu\alpha}$

$\alpha_1=2\nu\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha_1-2\nu\beta_1$
$=\alpha-\nu\beta-2\nu[(1+\nu^2)-\nu\alpha]$
$=\alpha-\nu\beta-2\nu(1+\nu^2)\beta+2\nu^2\alpha$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=(2\nu^2+1)\alpha-\nu[1+2(1+\nu^2)]\beta}$

Ανθ(α,β)=$[\nu,\underline{\nu,\ 2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\beta_1/\alpha_2}$ ‹ $\beta\alpha_2=\alpha_1\beta_1$ ‹
‹ $\beta\{(2\nu^2+1)\alpha-\nu[1+2(1+\nu^2)]\beta\}=(\alpha-\nu\beta)\,[(1+\nu^2)\beta-\nu\alpha]$
‹ $(2\nu^2+1)\alpha\beta-\nu[1+2(1+\nu^2)\beta^2=(1+\nu^2)\alpha\beta-\nu\alpha^2-\nu(1+\nu^2)\beta^2+\nu^2\alpha\beta$
‹ $(2\nu^2+1)\alpha\beta-\nu[1+2(1+\nu^2)\beta^2=(2\nu^2+1)\alpha\beta-\nu\alpha^2-\nu(1+\nu^2)\beta^2$
‹ $\boldsymbol{\alpha^2=(\nu^2+2)\beta^2}$

**(iii)** Ξέρουμε ότι Ανθ(α,β)=$[\nu-1, \underline{1, 2\nu-2}]$

τότε $\alpha=(\nu-1)\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-(\nu-1)\beta}$

$\beta=\alpha_1+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta-\alpha_1$
$=\beta-\alpha+(\nu-1)\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=\nu\beta-\alpha}$

$\alpha_1=(2\nu-2)\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha_1-(2\nu-2)\beta_1$
$=\alpha-(\nu-1)\beta-(2\nu-2)(\nu\beta-\alpha)$
$=\alpha-(\nu-1)\beta-\nu(2\nu-2)\beta+(2\nu-2)\alpha$
$=(2\nu-1)\alpha-(\nu-1+2\nu^2-2\nu)\beta$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=(2\nu-1)\alpha-(2\nu^2-\nu-1)\beta}$

Ανθ(α,β)=$[\nu-1, \underline{1, 2\nu-2}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\beta_1/\alpha_2}$ ‹ $\beta\alpha_2=\alpha_1\beta_1$ ‹
‹ $\beta[(2\nu-1)\alpha-(2\nu^2-\nu-1)\beta] =[ \alpha-(\nu-1)\beta][ \nu\beta-\alpha]$
‹ $(2\nu-1)\alpha\beta-(2\nu^2-\nu-1)\beta^2=\nu\alpha\beta-\alpha^2-\nu(\nu-1)\beta^2+(\nu-1)\alpha\beta$
‹ $(2\nu-1)\alpha\beta-(2\nu^2-\nu-1)\beta^2 =(2\nu-1)\alpha\beta-\alpha^2-\nu(\nu-1)\beta^2$
‹ $\boldsymbol{\alpha^2=(\nu^2-1)\beta^2}$

**(iv)** Ξέρουμε ότι Ανθ(α,β)=$[\nu, \underline{4, 2\nu}]$

τότε $\alpha=\nu\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta=4\alpha+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta-4\alpha_1$
$=\beta-4\alpha+4\nu\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=(1+4\nu)\beta-4\alpha}$

$\alpha_1=2\nu\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha-\nu\beta-2\nu[(1+4\nu)\beta-4\alpha]$
$=\alpha-\nu\beta-2\nu(1+4\nu)\beta+8\nu\alpha$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=(8\nu+1)\alpha-\nu(3+8\nu)\beta}$

Ανθ(α,β)=$[\nu, \underline{4, 2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\beta_1/\alpha_2}$ ‹ $\beta\alpha_2=\alpha_1\beta_1$ ‹
‹ $\beta[(8\nu+1)\alpha-\nu(3+8\nu)\beta] =[ \alpha-\nu\beta][ (1+4\nu)\beta-4\alpha]$
‹ $(8\nu+1)\alpha\beta-\nu(3+8\nu)\beta^2 =(1+4\nu)\alpha\beta-4\alpha^2-\nu(1+4\nu)\beta^2+4\nu\alpha\beta$
‹ $-\nu(3+8\nu)\beta^2 =-4\alpha^2-\nu(1+4\nu)\beta^2$
‹ $\boldsymbol{\nu(1+2\nu)\beta^2=2\alpha^2}$

**(v)** Ξέρουμε ότι $A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\mu, \underline{\mu, 2\mu}]$

τότε $\alpha=\mu\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\mu\beta}$

$\beta=\mu\alpha+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta - \mu\alpha_1$
$=\beta- \mu\alpha + \mu^2\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=(1+\mu^2)\beta - \mu\alpha}$

$\alpha_1=2\nu\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha-\mu\beta-2\nu[(1+\mu^2)\beta - \mu\alpha]$
$=\alpha-\mu\beta-2\nu(1+\mu^2)\beta+2\nu\mu\alpha$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\beta+(1+2\nu\mu)\alpha}$

$A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\mu, \underline{\mu,2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\beta_1/\alpha_2}$ ‹ $\beta\alpha_2=\alpha_1\beta_1$ ‹
‹ $\beta[-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\beta+(1+2\nu\mu)\alpha]=(\alpha-\mu\beta)[(1+\mu^2)\beta - \mu\alpha]$
‹ $-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\beta^2+(1+2\nu\mu)\alpha\beta=(1+\mu^2)\alpha\beta-\mu(1+\mu^2)\beta^2 -\mu^2+\mu^2\alpha\beta$
‹ $(2\nu+2\nu\mu^2-\mu^3)\beta^2+(\mu^2+2\nu\mu)\alpha\beta=\mu\alpha^2$

Αρκεί $\mu^2+2\nu\mu=0$ ‹ $\mu=\nu$

τότε[1] $A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\mu, \underline{\mu,2\nu}]$ fl $\boldsymbol{(2\nu+\nu^2\mu)\beta^2=\mu\alpha^2}$

**(vi)** Ξέρουμε ότι $A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\nu, \underline{1, 1, 2\nu}]$

τότε $\alpha=(\nu-1)\beta+\alpha_1$ ‹ $\boldsymbol{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta=1\alpha+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta - \alpha_1$
$=\beta- \alpha + \nu\beta$
‹ $\boldsymbol{\beta_1=(1+\nu)\beta-\alpha}$

$\alpha_1=1\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha 1 - \beta 1$
$=\alpha-\nu\beta -( 1+\nu)\beta - \alpha$
‹ $\boldsymbol{\alpha_2=-(2\nu+1)\beta +2\alpha}$

$\beta_1=2\nu\alpha_2+\beta_2$ ‹ $\beta_2=(\nu+1)\beta-\alpha-2\nu[-(2\nu+1)\beta+2\alpha]$
$=(\nu+1)\beta-\alpha+2\nu(2\nu+1)\beta-4\nu\alpha$
$=(\nu+1+4\nu^2+2\nu)\beta-(4\nu+1)\alpha$
‹ $\boldsymbol{\beta_2=(4\nu^2+3\nu+1)\beta-(4\nu+1)\alpha}$

$A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\nu, \underline{1, 1, 2\nu}]$ fl $\boldsymbol{\beta/\alpha_1=\alpha_2/\beta_2}$ ‹ $\beta\beta_2=\alpha_1\alpha_2$ ‹
‹ $\beta[(4\nu^2+3\nu+1)\beta-(4\nu+1)\alpha]= (\alpha-\nu\beta)[ -(2\nu+1)\beta +2\alpha]$

[1] Fowler σελ.83

‹ $(4\nu^2+3\nu+1)\beta^2-(4\nu+1)\alpha\beta=-(2\nu+1)\alpha\beta+2\alpha^2+\nu(2\nu+1)\beta^2-2\nu\alpha\beta$
‹ $(4\nu^2+3\nu+1-2\nu^2-\nu)\beta^2 = 2\alpha^2$
‹ $\mathbf{(2\nu^2+2\nu+1)\beta^2 = 2\alpha^2}$

**(vii)** Ξέρουμε ότι $A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\nu, \underline{\mu, \mu, 2\nu}]$

τότε $\alpha=\nu\beta+\alpha_1$ ‹ $\mathbf{\alpha_1=\alpha-\nu\beta}$

$\beta=\mu\alpha+\beta_1$ ‹ $\beta_1=\beta - \mu\alpha_1$
$=\beta- \mu\alpha + \mu\nu\beta$
‹ $\mathbf{\beta_1=(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha}$

$\alpha_1=\mu\beta_1+\alpha_2$ ‹ $\alpha_2=\alpha_1 -\mu\beta_1$
$=\alpha-\nu\beta - \mu[( 1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha]$
$= \alpha-\nu\beta-\mu( 1+\nu\mu)\beta+\mu^2\alpha$
‹ $\mathbf{\alpha_2=-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta +(1+\mu^2)\alpha}$

$\beta_1=2\nu\alpha_2+\beta_2$ ‹ $\beta_2= \beta_1-2\nu\alpha_2$
$=(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha-2\nu[-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta +(1+\mu^2)\alpha]$
$=(1+\nu\mu)\beta - \mu\alpha+2\nu(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta-2\nu(1+\mu^2)\alpha$
$=(1+\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu\mu+2\nu^2\mu^2)\beta-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha$
‹ $\mathbf{\beta_2=(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2)\beta-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha}$

$A\nu\theta(\alpha,\beta)=[\nu, \underline{\mu, \mu, 2\nu}]$ fl $\mathbf{\beta/\alpha_1=\alpha_2/\beta_2}$ ‹ $\beta\beta_2=\alpha_1\alpha_2$ ‹
‹ $\beta[(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2)\beta-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha]=(\alpha-\nu\beta)[-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta]$
$+(1+\mu^2)\alpha]$
‹ $(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2)\beta^2-(2\nu+2\nu\mu^2+\mu)\alpha\beta=$
$=-(\nu+\mu+\nu\mu^2)\alpha\beta+(1+\mu^2)\alpha^2+\nu(\nu+\mu+\nu\mu^2)\beta^2-\nu(1+\mu^2)\alpha\beta$
$=-(2\nu+\mu+2\nu\mu^2)\alpha\beta+(1+\mu^2)\alpha^2+(\nu^2+\nu\mu+\nu^2\mu^2)\beta^2$
‹ $(1+3\nu\mu+ 2\nu^2+2\nu^2\mu^2- \nu^2-\nu\mu-\nu^2\mu^2)\beta^2=(1+\mu^2)\alpha^2$
‹ $\mathbf{(1+2\nu\mu+ \nu^2+\nu^2\mu^2)\beta^2=(1+\mu^2)\alpha^2}$

# Το είδος της $A\nu\theta(\beta,\psi)=[\underline{2,9,8,3}]$ . Καθ᾽ ἔλλειψιν ἢ καθ᾽υπερβολήν;

Αφού $A\nu\theta(\beta,\psi)=[\underline{2,9,8,3}]$ , θα έχουμε ότι

$$\beta/\psi = 2 + \cfrac{}{9 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$$

Αν θεωρήσουμε τις γραμμές $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ θα πάρουμε :

$$\beta/\psi = 2 + \frac{1}{\beta/\psi_1} \ ‹ \ \beta/\psi = 2 + \psi_1/\beta \ ‹ \ \beta/\psi = (2\beta + \psi_1)/\beta \quad (\alpha)$$

$$\beta/\psi_1 = 9 + \frac{1}{\beta/\psi_2} \ ‹ \ \beta/\psi1 = 9 + \psi_2/\beta \ ‹ \ \beta/\psi_1 = (9\beta + \psi_2)/\beta \quad (\beta)$$

$$\beta/\psi_2 = 8 + \frac{1}{\beta/\psi_3} \ ‹ \ \beta/\psi_2 = 8 + \psi_3/\beta \ ‹ \ \beta/\psi_2 = (8\beta + \psi_3)/\beta \quad (\gamma)$$

$$\beta/\psi_3 = 3 + \frac{1}{\beta/\psi} \ ‹ \ \beta/\psi_3 = 3 + \psi/\beta \ ‹ \ \beta/\psi_3 = (3\beta + \psi)/\beta \ (\delta)$$

Από αυτές τις σχέσεις, με τον ανάπαλιν λόγο (βιβλίο V, ορισμός 13) και τη σύνθεση λόγου (βιβλίο V, ορισμός 14) θα δείξουμε το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας τον ανάπαλιν λόγο για τη σχέση (δ), έχουμε :

$$\psi_3/\beta = \beta/(3\beta + \psi) \ ‹$$

$$(\psi_3 + 8\beta)/\beta = [\beta + 8(3\beta+\psi)] / [3\beta + \psi] \ ‹ \ (\text{σχέση } \gamma)$$

$$\beta/\psi_2 = (25\beta + 8\psi)/(3\beta + \psi) \ ‹$$

$$\psi_2/\beta = (3\beta + \psi)/(25\beta + 8\psi) \ ‹$$

$$(\psi_2 + 9\beta)/\beta = [3\beta + \psi + 9(25\beta+8\psi)] / [3\beta + \psi] \ ‹$$

$(\psi_2 + 9\beta) / \beta = (228\beta + 72\psi) / (3\beta + \psi)$ ‹ (σχέση β)

$\beta/\psi_1 = (228\beta + 72\psi) / (3\beta + \psi)$ ‹

$\psi_1/\beta = (3\beta + \psi) / (228\beta + 72\psi)$ ‹

$(\psi_1 + 2\beta) / \beta = [\, 3\beta + \psi + 2(228\beta + 72\psi)] / [228\beta + 72\psi]$ ‹

$(\psi_1 + 2\beta) / \beta = (459\beta + 145\psi) / (228\beta + 72\psi)$ ‹ (σχέση α)

$\beta/\psi = (59\beta + 145\psi) / (228\beta + 72\psi)$ ‹

$\beta\,(228\beta + 72\psi) = \psi\,(59\beta + 145\psi)$ ‹

$228\beta^2 + 72\beta\psi = 459\beta\psi + 145\psi^2$ ‹

$\mathbf{228\beta^2 = \psi(387\beta + 145\psi)}$ Η ζητούμενη δευτεροβάθμια εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι είναι όντως στη μορφή $\psi(\alpha+\chi)=M$, αρκεί $M=228\beta^2$, $\alpha=387\beta$ και $\chi=145\psi$. Τέλος, ο λόγος $\chi/\psi=145/1$, δηλαδή $\lambda=145$ και $\mu=1$. Άρα, είναι καθ' υπερβολήν.

# Οι πρώτοι οκτώ πρώτοι όροι της ανθυφαίρεσης της αρμονίας του Φιλολάου και η απειρία της.

Ο Φιλόλαος στο Περί Φύσιος, fragment 6, γραμμές 16-24 υπολογίζει τους τέσσερις πρώτους όρους της ανθυφαίρεσης της αρμονίας :

ἁρμονί ας δὲ μέγεθό ς ἐ στι συλλαβὰ καὶ δι' ὀ ξειᾶ ν· τὸ δὲ δι' ὀ ξειᾶ ν μεῖζον τᾶ ς συλλαβᾶ ς ἐ πογδό ωι. ἔ στι γὰρ ἀπὸ ὑ πάτας ἐ πὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐ πὶ νεάταν δι' ὀ ξειᾶ ν, ¢pÕ dὲ νε£taj ™j tr…tan sul l ab£, ἀπὸ dὲ τρί τας ἐ ς Øp£tan di' ὀ ξειᾶ ν· τὸ δ' ἐ ν μέσωι μέσσας καὶ τρί τας ἐ πό γδοον· i dὲ συλλαβὰ ἐ πί τριτον, tÕ dὲ δι' ὀ ξειᾶ ν ἡμιό λιον, tÕ di¦ pas©n dὲ διπλÒon. οὕ τως ἁρ- μονί α πέντε ἐ πό γδοα καὶ δύο διέσιες, δι' Ñxei©n dὲ τρί α ἐ πό γδοα καὶ δί εσις, sul l ab¦ dὲ δύ' ἐ πό γδοα καὶ δί εσις.

**(i)** Εμείς γνωρίζουμε ότι :

$2/1 = (3/2)^{1} * 4/3$ , με $4/3 < 3/2$

$3/2 = (4/3)^{1} * 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^{2} * 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^{2} * 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Η τελευταία αναλυτικότερα γράφεται :

$3^2/2^3 = (2^8/3^5)^{2} * 3^{12}/2^{19}$

Συνεχίζοντας έχουμε :

$2^8/3^5 = (3^{12}/2^{19})^{3} * 2^{65}/3^{41}$

Αρκεί $2^{65}/3^{41} < 3^{12}/2^{19}$
ή $2^{84} < 3^{53}$
ή $84 \log 2 < 53 \log 3$
ή $25.286 < 25.287$ ορθό

**Έπειτα παίρνουμε :**

$3^{12}/2^{19} = (2^{65}/3^{41})^{1} \times 3^{53}/2^{84}$

Αρκεί $3^{53}/2^{84} < 2^{65}/3^{41}$
ή $3^{94} < 2^{149}$
ή $94 \log 3 < 149 \log 2$
ή $44.849 < 44.853$ , που ισχύει

Στο επόμενο βήμα :

$2^{65}/3^{41} = (3^{53}/2^{84})^{5} * 2^{485}/3^{306}$

Αρκεί $2^{485}/3^{306} < 3^{53}/2^{84}$
ή $2^{569} < 3^{359}$
ή $569 \log 2 < 359 \log 3$
ή $171.2860 < 171.2865$ , αληθές

Συνεχίζοντας έχουμε :

$3^{53}/2^{84} = (2^{485}/3^{306})^2 * 3^{665}/2^{1054}$

Πρέπει $3^{665}/2^{1054} < 2^{485}/3^{306}$
ή $3^{971} < 2^{1539}$
ή $971 \log 3 < 1539 \log 2$
ή $463.284 < 463.285$ , το οποίο ισχύει

Συνολικά οι 8 πρώτοι όροι της (πολλαπλασιαστικής) ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι: [1,1,2,2,3,1,5,2,...]

**(ii)**

Από τις παραπάνω σχέσεις , για τα υπόλοιπα, έχουμε

$2^2/3 > 3^2/2^3 > 2^8/3^5 > 3^{12}/2^{19} > 2^{65}/3^{41} > 3^{53}/2^{84} > 2^{485}/3^{306} > 3^{665}/2^{1054}$

αυτά τείνουν στο λόγο 1/1. Όμως επειδή είναι της μορφής $2^\kappa/3^\lambda$ ή $3^\kappa/2^\lambda$ δεν θα γίνουν ποτέ ίσα με 1/1, ώστε η ανθυφαίρεση να είναι πεπερασμένη. Επομένως, η ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη.

## Το Κριτήριο λόγου και η τελικώς περιοδική ανθυφαίρεση

(Μία περίπτωση)

Υποθέτουμε ότι το ζεύγος μεγεθών α, β έχει τελικά περιοδική ανθυφαίρεση. **Θα δείξουμε πως ο λόγος δύο διαδοχικών υπολοίπων είναι ίσος με το λόγο δύο άλλων διαδοχικών υπολοίπων** .

Αφού είναι τελικά περιοδική θα υπάρχουν ν,μ για τα οποία θα ισχύει Ανθ(α,β) = $[\kappa_o,\lambda_o,\ldots,\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_\mu,\lambda_\mu,\ldots]$ , με $\kappa_\nu=\kappa_\mu$, $\lambda_\nu=\lambda_\mu$, ......

Άρα θα έχουμε $Αν\theta(\alpha,\beta) = [\kappa_o,\lambda_o,\ldots,\underline{\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_{\mu-1},\lambda_{\mu-1}}]$

Όμως τα $\kappa_i$, $\lambda_i$ είναι τα διαδοχικά πηλίκα και επομένως αν θεωρήσουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία διαδοχικών υπολοίπων είναι η $\alpha>\beta>\alpha_1>\beta_1>\ldots>\alpha_\nu>\beta_\nu>\ldots>\alpha_\mu>\beta_\mu>\ldots$ , θα πάρουμε τις σχέσεις

......... $\alpha_\nu = \kappa_\nu\beta_\nu + \alpha_{\nu+1}$ ................................ $\alpha_\mu = \kappa_\mu\beta_\mu + \alpha_{\mu+1}$
.........$\beta_\nu = \lambda_\nu\alpha_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}$ ................................ $\beta_\mu = \lambda_\mu\alpha_{\mu+1} + \beta_{\mu+1}$

Οπότε $Αν\theta(\alpha_\nu,\beta_\nu) = [\underline{\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_{\mu-1},\lambda_{\mu-1}}]$

και $Αν\theta(\alpha_\mu,\beta_\mu)= [\underline{\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_{\mu-1},\lambda_{\mu-1}}]$

Δηλαδή, $Αν\theta(\alpha_\nu,\beta_\nu) = Αν\theta(\alpha_\mu,\beta_\mu)$

Επειδή $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\alpha_\mu$, $\beta_\mu$, μεγέθη για τα οποία ισχύει $\alpha_\nu>\beta_\nu$ , $\alpha_\mu>\beta_\mu$ και όπως δείξαμε $Αν\theta(\alpha_\nu,\beta_\nu) = Αν\theta(\alpha_\mu,\beta_\mu)$ τότε από γνωστή πρόταση θα έχουμε ότι :

$\alpha_\nu\beta_\mu=\beta_\nu\alpha_\mu$ ή $\boldsymbol{\alpha_\nu/\beta_\nu=\alpha_\mu/\beta_\mu}$ και $\nu<\mu$

## Αντίστροφο :

Τώρα θα υποθέσουμε πως ο λόγος δύο διαδοχικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης των α, β με $\alpha>\beta$, είναι ίσος με το λόγο δύο άλλων διαδοχικών υπολοίπων. Θα δείξουμε ότι η ανθυφαίρεση είναι τελικά περιοδική.

**Δηλαδή, υποθέσαμε ότι υπάρχουν ν, μ (φυσικοί) με $\nu<\mu$ για τα οποία να ισχύει $\alpha_\nu/\beta_\nu=\alpha_\mu/\beta_\mu$**

Αν $Αν\theta(\alpha,\beta) = [\kappa_o,\lambda_o,\ldots,\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_\mu,\lambda_\mu,\ldots]$

τότε :
$Αν\theta(\alpha_\nu,\beta_\nu) = [\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots,\kappa_\mu,\lambda_\mu,\ldots.]$
$Αν\theta(\alpha_\mu,\beta_\mu)= [\kappa_\mu,\lambda_\mu,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Δηλαδή, $Αν\theta(\alpha_\nu,\beta_\nu) = [\kappa_\nu,\lambda_\nu,\ldots, Αν\theta(\alpha_\mu,\beta_\mu)]$

Όμως η υπόθεση $\alpha_\nu/\beta_\nu=\alpha_\mu/\beta_\mu$ είναι ισοδύναμη με την $\alpha_\nu\beta_\mu=\beta_\nu\alpha_\mu$ .

Επειδή $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\alpha_\mu$, $\beta_\mu$, μεγέθη για τα οποία ισχύει $\alpha_\nu>\beta_\nu$ , $\alpha_\mu>\beta_\mu$ και όπως υποθέσαμε $\alpha_\nu\beta_\mu=\beta_\nu\alpha_\mu$ , τότε $Αν\theta(\alpha_\nu,\beta_\nu) = Αν\theta(\alpha_\mu,\beta_\mu)$ .

Ο μόνος τρόπος για να ισχύουν τα παραπάνω είναι αν έχουμε τελικά περιοδική ανθυφαίρεση. (δηλ. $κ_ν=κ_μ$, $λ_ν=λ_μ$, ...... )

**Γιάννης Πλατάρος**

# Η άπειρη πολλαπλασιαστική ανθυφαιρετική διαδικασία της αρμονία, στα σχόλια του Φιλολάου.

Ο Φιλόλαος στο Περί Φύσιος, fragment 6, γραμμές 16-24 υπολογίζει τους τέσσερις πρώτους όρους της ανθυφαίρεσης της αρμονίας :

ἁρμονί ας δὲ μέγεθό ς ἐ στι συλλαβὰ καὶ δι' ὀ ξειᾶ ν· τὸ
δὲ δι' ὀ ξειᾶ ν μεῖζον τᾶ ς συλλαβᾶ ς ἐ πογδό ωι. ἔ στι γὰρ
ἀπὸ ὑ πάτας ἐ πὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐ πὶ
νεάταν δι' ὀ ξειᾶ ν, ¢pÕ dὲ νε£taj ™j tr…tan sul l ab£, ἀπὸ
dὲ τρί τας ἐ ς Øp£tan di' ὀ ξειᾶ ν· τὸ δ' ἐ ν μέσωι μέσσας
καὶ τρί τας ἐ πό γδοον· ¡ dὲ συλλαβὰ ἐ πί τριτον, tÕ dὲ
δι' ὀ ξειᾶ ν ἡμιό λιον, tÕ di¦ pas©n dὲ διπλÒon. οὕ τως ἁρ-
μονί α πέντε ἐ πό γδοα καὶ δύ ο διέσιες, δι' Ñxei©n dὲ τρί α
ἐ πό γδοα καὶ δί εσις, sul l ab¦ dὲ δύ' ἐ πό γδοα καὶ δί εσις.

**(i)** Εμείς γνωρίζουμε ότι :

$2/1 = (3/2)^1 * 4/3$ , με $4/3 < 3/2$

$3/2 = (4/3)^1 * 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^2 * 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^2 * 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Η τελευταία αναλυτικότερα γράφεται :

$3^2/2^3 = (2^8/3^5)^2 * 3^{12}/2^{19}$

Συνεχίζοντας έχουμε :

$2^8/3^5 = (3^{12}/2^{19})^3 * 2^{65}/3^{41}$

Αρκεί $2^{65}/3^{41} < 3^{12}/2^{19}$

ή $2^{84} < 3^{53}$

ή $84 \log 2 < 53 \log 3$

ή $25.286 < 25.287$ ορθό

Έπειτα παίρνουμε :

$3^{12}/2^{19} = (2^{65}/3^{41})^{1} \times 3^{53}/2^{84}$

Αρκεί $3^{53}/2^{84} < 2^{65}/3^{41}$
ή $3^{94} < 2^{149}$
ή $94 \log 3 < 149 \log 2$
ή $44.849 < 44.853$ , που ισχύει

Στο επόμενο βήμα :

$2^{65}/3^{41} = (3^{53}/2^{84})^{5} * 2^{485}/3^{306}$

Αρκεί $2^{485}/3^{306} < 3^{53}/2^{84}$
ή $2^{569} < 3^{359}$
ή $569 \log 2 < 359 \log 3$
ή $171.2860 < 171.2865$ , αληθές

Συνεχίζοντας έχουμε :

$3^{53}/2^{84} = (2^{485}/3^{306})^{2} * 3^{665}/2^{1054}$

Πρέπει $3^{665}/2^{1054} < 2^{485}/3^{306}$
ή $3^{971} < 2^{1539}$
ή $971 \log 3 < 1539 \log 2$
ή $463.284 < 463.285$ , το οποίο ισχύει

Συνολικά οι 8 πρώτοι όροι της (πολλαπλασιαστικής) ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι: [1,1,2,2,3,1,5,2,...]

**(ii)**

Από τις παραπάνω σχέσεις , για τα υπόλοιπα, έχουμε

$2^2/3 > 3^2/2^3 > 2^8/3^5 > 3^{12}/2^{19} > 2^{65}/3^{41} > 3^{53}/2^{84} > 2^{485}/3^{306} > 3^{665}/2^{1054}$

αυτά τείνουν στο λόγο 1/1. Όμως επειδή είναι της μορφής $2^κ/3^λ$ ή $3^κ/2^λ$ δεν θα γίνουν ποτέ ίσα με 1/1, αφού θα έπρεπε $2^κ=3^λ$ για κάποια κ, λ,

άτοπο , διότι 2, 3 πρώτοι και έκαστος ακέραιος έχει μοναδικό ανάπτυγμα σε γινόμενο πρώτων.
Επομένως, η ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη.

# Απαντήσεις σε επιλεγμένα ερωτήματα της ανθυφαίρεσης

1. Τί είναι ανθυφαίρεση μεταξύ δύο ευθ. τμημάτων α, β, με α<β;

2. Ποιά η ανθυφαίρεση των αριθμών 300 και 18;

3. Πώς μπορούμε να καταλάβουμε αν μια ανθυφαίρεση περατούται;

4. Η ανθυφαίρεση της Χρυσής Τομής

5. Η ανθυφαίρεση του $\sqrt{2}$ με την μονάδα

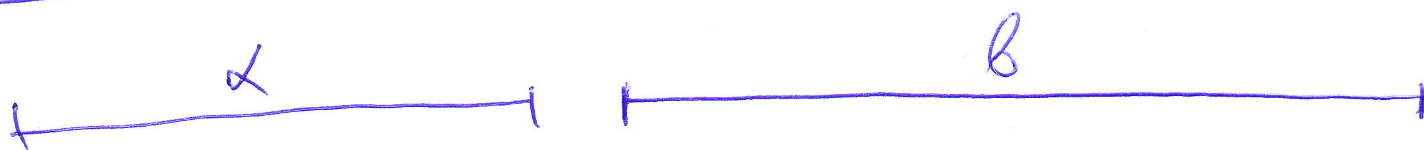
Πρόχειρες σημειώσεις για καλύτερη κατανόηση της έννοιας «ανθυφαίρεση»

ΓΙΑΝΝΗΣ Π. ΠΛΑΤΑΡΟΣ

— 1 —

Τι είναι η ανθυφαίρεση μεταξύ δύο τμημάτων α, β με α < β ;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ :</u>




1) βγάζω όσα α υπάρχουν στο β, και βρίσκω τι περισσεύει, αν περισσεύει, έστω γ

2) βγάζω όσα γ υπάρχουν στο α και γράφω τί περισσεύει, αν περισσεύει, έστω δ, δ

3) βγάζω όσα δ, υπάρχουν στο γ και .....

α) Αν καταλήξω να μην περισσεύει τίποτα, τα α και β έχουν <u>κοινό μέτρο</u>, είναι <u>σύμμετρα μεγέθη</u> η αναλογία $\frac{\beta}{\alpha}$ εκφράζει <u>ρητό αριθμό</u>

θ) Αν η διαδικασία αυτή δεν τερματίζεται ΠΟΤΕ και συνεχίζεται στο διηνεκές επ' άπειρον, τότε τα α, β, ΔΕΝ έχουν κοινό μέτρο, έχουν ασύμμετρη σχέση και ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ εκφράζει άρρητο αριθμό

Το θέμα είναι, πώς μπορώ να καταλάβω, ότι η διαδικασία αυτή μπορεί και να μην τελειώνει ΠΟΤΕ!

(Υπάρχει τρόπος, σε ορισμένες όμως περιπτώσεις!)

— ΑΦΗΝΟΥΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΣΩΡΙΝΑ —

Ποια είναι η ανθυφαίρεση μεταξύ των αριθμών 300 και 18;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Βγάζω όσα 18-άρια υπάρχουν στο 300 (υπάρχουν 16 δεκαοκτάρια στο 300) και περισσεύουν 12 μονάδες

2) Βγάζω όσες δωδεκάδες υπάρχουν στο 18 (μία υπάρχει) και περισσεύουν 6

3) Βγάζω όσα 6-άρια υπάρχουν στο 18 (υπάρχουν τρία) και δεν περισσεύει τίποτα

ΑΡΑ: Η σχέση του 300 και του 18 είναι ρητή (το ξέραμε έτσι κι αλλιώς) και το 6 είναι κοινό μέτρο και του 300 και του 18, διότι

300 = 50 φορές το 6
18 = 3 φορές το 6

Το 6 είναι μέγιστο κοινό μέτρο και του 300 και του 18

Συμβολικά ΜΚΔ (300, 18) = 6

Δηλαδή: Η διαδικασία της ανθυφαίρεσης μεταξύ δύο ακεραίων, είναι η διαδικασία εύρεσης ΜΚΔ.

Δηλαδή: Η έννοια της ανθυφαίρεσης, προκειμένου για δύο ακεραίους, ταυτίζεται με την έννοια του Ευκλειδείου αλγορίθμου εύρεσης ΜΚΔ

Σημείωση: Δύο ακέραιοι πάντα έχουν κοινό μέτρο ~~και~~ αυτό είναι η μονάδα!
Με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, απλώς, βρίσκουμε το πιό μεγάλο μέτρο (κοινό) αν υπάρχει, πέραν της μονάδας.
Για δύο μεγέθη όπως είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα α, β όμως τί ισχύει;;;

Για τα ευθύγραμμα τμήματα υπάρχει ζήτημα!

1) Πώς γίνεται — αν γίνεται — η ανθυφαίρεση;

2) Πώς μπορώ να αποφανθώ αν αυτή η διαδικασία (αλγόριθμος) περατούται ή όχι;

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου η διαδικασία αυτή, μπορεί να γίνει άπειρη, ότι συνεχίζεται στο διηνεκές) και άρα η σχέση είναι άρρητη.

Ο Ίππασος, λέγεται, ότι ανεκάλυψε ότι η διαδικασία μεταξύ κάθετης πλευράς ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου και υποτείνουσάς του δεν περατούται ποτέ, άρα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος!

Οι ιστορικοί πιστεύουν, ότι ο Ίππασος δεν ανακάλυψε την άρρητη σχέση του $\sqrt{2}$ με την μονάδα, αλλά την άρρητη σχέση πλευράς κανονικού πενταγώνου με την διαγώνιό του δ.

Ανθφ(δ, α) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, .......]

Είναι η πιό απλή ανθυφαιρετική σχέση που υπάρχει και μάλλον αυτήν ανεκάλυψε ο Ίππασος του οποίου η ανακάλυψη έσπασε το Πυθαγόρειο φιλοσοφικό σύστημα ότι όλες οι σχέσεις-λόγοι μεταξύ (ομοειδών) μεγεθών είναι σύμμετρες-ρητές, υπάρχει δηλ. κοινό μέτρο πάντα μεταξύ δύο μεγεθών.

Πώς όμως μπορούσε να αντιληφθεί κάποιος ότι μια ανθυφαίρεση δεν περατώνεται ποτέ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Στο θέμα της πλευράς και της διαγωνίου κανονικού πενταγώνου ήταν πολύ φανερό!

Πώς;;;

1) Κάνω την διαίρεση

$$\begin{array}{l|l} \delta & \alpha \\ \hline \delta-\alpha & 1 \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης:

$$\boxed{\delta = 1\cdot\alpha + (\delta-\alpha), \text{ με } \delta-\alpha < \alpha}$$

βγαίνει από το σχήμα!

2) Κάνω την διαίρεση: $\begin{array}{r|l} \alpha & \delta-\alpha \\ -(\delta-\alpha) & 1 \\ \hline 2\alpha-\delta & \end{array}$

Ταυτότητα διαίρεσης: $\alpha = 1\cdot(\delta-\alpha) + (2\alpha-\delta)$, με $2\alpha-\delta < \delta-\alpha$

3) Κάνω την διαίρεση!

| | |
|---|---|
| $\delta-\alpha$ | $2\alpha-\delta$ |
| $-(2\alpha-\delta)$ | $1$ |
| $2\delta-3\alpha$ | |

Ταυτότητα $(\delta-\alpha) = 1\cdot(2\alpha-\delta) + (2\delta-3\alpha)$, με $2\delta-3\alpha < 2\alpha-\delta$

4) Κάνω την διαίρεση!
(το υπόλοιπο γίνεται διαιρέτης και ο διαιρέτης, διαιρετέος)

| | |
|---|---|
| $2\alpha-\delta$ | $2\delta-3\alpha$ |
| $-(2\delta-3\alpha)$ | $1$ |
| $5\alpha-3\delta$ | |

Ταυτότητα διαίρεσης:

$$2\alpha-\delta = 1\cdot(2\delta-3\alpha) + (5\alpha-3\delta), \text{ με}$$

$$\text{με } (5\alpha-3\delta) < (2\delta-3\alpha)$$

Τα παραπάνω προκύπτουν από το σχήμα!

Από το σχήμα προκύπτει μια ομοιότητα που επαναλαμβάνεται ες αεί! Έφθασα μέχρι το 4ο βήμα και βλέπω συνεχώς πηλίκο το 1

# Γιατί βγαίνει όλο το 1;

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για τον λόγο για τον οποίο (λόγος=αιτία) όπου όλες οι παρακάτω διαιρέσεις δίνουν το ίδιο πηλίκο!

$\delta \,|\, \alpha$ , $3\delta \,|\, 3\alpha$ , $\lambda\cdot\delta \,|\, \lambda\cdot\alpha$

## Τόσο απλό είναι!

Εδώ έχουμε:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\delta-\alpha} = \frac{\delta-\alpha}{2\alpha-\delta} = \frac{2\alpha-\delta}{2\delta-3\alpha} = \dots$$

↓ πρώτο βήμα αλγορίθμου, ↓ δεύτερο βήμα, ↓ τρίτο, ↓ τέταρτο

Από την πρώτη ισότητα έχω:

$\alpha^2 = \delta(\delta-\alpha) \Leftrightarrow \delta^2 - \alpha\delta - \alpha^2 = 0$ , απ' όπου

$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots = \varphi$ (λόγος χρυσής τομής)

και αφού υπάρχει ασύμμετροι λόγοι θα βρίσκω συνέχεια πηλίκο 1 και ανθυφ(δ,λ) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, ....]

Πώς εξηγείται αυτό;

---

Ο τρίτος λόγος, σχηματίζεται όπως σχηματίζεται ο δεύτερος από τον πρώτο.
(αντιστροφή και αφαίρεση επόμενου από προηγούμενο)

---

Για να το δείτε καλά αυτό, πάρτε το πρώτο αποτέλεσμα που θα βρείτε στην Google με λέξεις-κλειδιά:

Ανθυφαίρεση, πλευράς, διαγωνίου κανονικού, πενταγώνου.

Να βρεθεί η ανθυφαίρεση του $\sqrt{2}$ με την μονάδα.

Απάντηση :

Ζητείται Ανθυφ $(\sqrt{2}, 1)$

Πρώτα πρέπει να κάνω την διαίρεση

$$\begin{array}{c|c} \sqrt{2} & 1 \\ \hline υ & π \end{array}$$

και να βρώ το σωστό πηλίκο (π) απαραιτήτως ακέραιο και το σωστό υπόλοιπο (υ) έτσι ώστε $υ < 1$. (Το υπόλοιπο πρέπει πάντα να είναι μικρότερο από τον διαιρέτη 1.

Για να βρώ το π, θα κάνω δοκιμές. Μεταφοράτι>> δεν ξέρω να εκτιμήσω πόσες φορές χωράει το 1 στο $\sqrt{2}$.

Μπορώ «να κλέψω» λίγο στους υπολογισμούς
αφού ξέρω από το κομπιουτεράκι, ότι
$\sqrt{2} \simeq 1,4142\ldots$

Άρα το 1 στο $\sqrt{2}$ χωράει 1
1 φορά και περισσεύει 0,4142...
όπου 0,4142... < 1

Άρα την βρήκα την <u>πρώτη</u> διαίρεση
του αλγορίθμου της ανθυφαίρεσης:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2} & 1 \\ \hline -\ 1 & 1 \\ \hline \sqrt{2}-1 & \end{array}$$

Γράφω και την σχετική <u>ταυτότητα της διαίρεσης</u>

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2}-1), \text{ με } \sqrt{2}-1 < 1$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\Delta = \delta \cdot \Pi + \upsilon, \text{ με } \upsilon < \delta$$

— B —

Μετά, πρέπει να κάνω την διαίρεση

$$\begin{array}{c|c} υ & δ \\ \hline υ' & π' \end{array}$$

Ποιο είναι το π'; ποιο το υ';

$$\begin{array}{c|c} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \hline 2-\sqrt{2} & 1 \end{array}$$

Δοκιμάζω με το 1 για πηλίκο

πρέπει όμως να ισχύει και η ταυτότητα της διαίρεσης! $1 = 1\cdot(\sqrt{2}-1) + (2-\sqrt{2})$ (ισχύει εκ κατασκευής)

και $2-\sqrt{2} < \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow$

$3 < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$9 < 4\cdot 2 \Leftrightarrow$

$9 < 8$ άτοπο

Άρα δεν είναι πηλίκο το 1,

δοκιμάζω το 2

$$\begin{array}{r|l} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \cline{2-2} -(2\sqrt{2}-2) & 2 \\ \cline{1-1} 3-2\sqrt{2} & \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης: $1 = 2(\sqrt{2}-1) + (3-2\sqrt{2})$

και πρέπει επιπλέον

$3-2\sqrt{2} < \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow$

$4 < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$16 < 9 \cdot 2 \Leftrightarrow$

$16 < 18$ αληθές

Επομένως, μέχρι στιγμής:

Ανθυφ. $(\sqrt{2}, 1) = [1, 2, ;, ;, ;]$

Συνεχίζω:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2}-1 & 3-2\sqrt{2} \\ \cline{2-2} -(3-2\sqrt{2}) & 1 \\ \cline{1-1} 3\sqrt{2}-4 & \end{array}$$

Εξετάζω την ισχύ: $3\sqrt{2}-4 < 3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$7 > 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$49 > 50$ άτοπο

Δοκιμάζω με πηλίκο το 2:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2}-1 & 3-2\sqrt{2} \\ -(6-4\sqrt{2}) & 2 \\ \hline 5\sqrt{2}-7 & \end{array}$$

Πρέπει $5\sqrt{2}-7 < 3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$7\sqrt{2} < 10 \Leftrightarrow$

$98 < 100$ αληθές!

Άρα Ανθυφ.$(\sqrt{2},1] = [1, 2, 2, ;\ ;\ ;]$

Μήπως το ψηφίο 2 είναι περίοδος της ανθυφαιρέσεως <u>και άρα είναι ατελεύτητη;</u>

(ή όπερ το αυτό: Μήπως το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος;)

~~Παρατήρηση~~

Αν το 2 είναι περίοδος, (Αν) θα αρκεί να ισχύει

$$\frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow$$

$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2+1-2\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2}$ ισχύει!

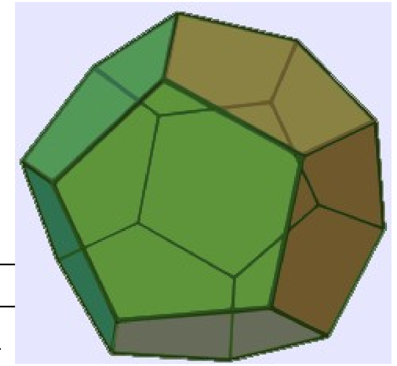
Άρα Ανθυφ$(\sqrt{2},1) = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να γίνει η ανθυφαίρεση, μεταξύ της διαγωνίου δ και της πλευράς α ενός κανονικού πενταγώνου.

**Διαπραγμάτευση του προβλήματος: (Απευθύνεται σε αναγνώστη με ελάχιστες πρότερες γνώσεις)**

Το παραπάνω πρόβλημα είναι πιθανόν να ετέθη στους Πυθαγόρειους μιας και το κανονικό πεντάγωνο είναι φυσικό σχήμα που απαντάται στην περιοχή

Κατά τον Von Fritz, είναι πιθανόν η ανακάλυψη της ύπαρξης ασυμμέτρων μεγεθών να έγινε από τον πυθαγόρειο Ίππασο. Ο Ίππασος ενδιαφερόταν, πιθανότατα, για το κανονικό δωδεκάεδρο και κατ΄ επέκταση **για τις έδρες του που είναι κανονικά πεντάγωνα.** Κάτι τέτοιο κατά Von Fritz, είναι απόλυτα δικαιολογημένο, διότι **η Κάτω Ιταλία είναι γεμάτη από κρυστάλλους πυριτίου, οι οποίοι είναι κανονικά δωδεκάεδρα** ,και οι Πυθαγόρειοι ενδιαφέρονταν για αριθμητικές αναλύσεις γεωμετρικών επιπέδων σχημάτων και στερεών. Ο Fritz συνδέει την ανακάλυψη ασυμμέτρων μεγεθών με την άμεση συνειδητοποίηση, πως ασυμμετρία σημαίνει αδυναμία αλγοριθμικής περάτωσης στης διαδικασία εύρεσης κοινού μέτρου δύο δεδομένων συγκρινομένων μηκών. Σύμφωνα με τον Von Fritz το πρόβλημα είναι το εξής : **δεδομένου ενός κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ μιας πλευράς του και της διαγωνίου του.**



**Το κανονικό πεντάγωνο, είναι ένα σχήμα που έχει 5 ίσες πλευρές και 5 ίσες γωνίες. Από αυτή την πληροφορία , μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα, ότι έχει κάθε γωνία του ίση με 108 μοίρες. Πώς γίνεται αυτό:**

**Στο παρακάτω σχήμα, έχω ένα κανονικό πεντάγωνο, το οποίο χωρίζω σε τρία τρίγωνα.**

$\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \tau\omega\nu\ 5\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \acute{\iota}\sigma\omega\nu\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu\ \pi\varepsilon\nu\tau\alpha\gamma\omega\nu o\upsilon = \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha$

$9\ \gamma\omega\nu\iota\omega\nu\ \tau\omega\nu\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E} = \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu.$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E} = 3\cdot 180^0 \Rightarrow$ (Το $\acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu\ \pi\alpha\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon$ ,

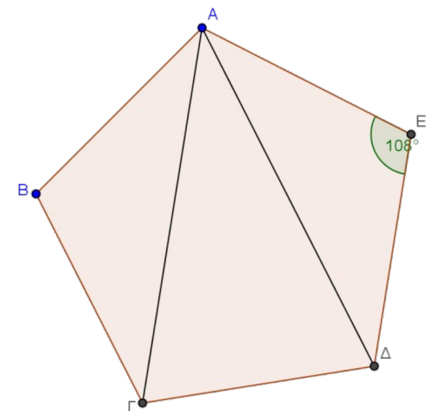
$\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ 180^0$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E} = 540^0 \Rightarrow (\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\ o\iota\ 5\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma)$

$5\cdot\hat{A} = 540^0 \Rightarrow$

$\hat{A} = \frac{540^0}{5} \Rightarrow$

$\hat{A} = 108^0$




**Στα τρία τρίγωνα που βλέπω στο πεντάγωνο, τα δύο (ΒΑΓ και ΑΔΕ) είναι εξ ορισμού ισοσκελή. Φαίνεται (με το μάτι) να είναι ισοσκελές και το ΑΓΔ, αλλά αυτό θέλει απόδειξη.**

**Να βρω τις γωνίες των τριών τριγώνων: Ξεκινάω με το ΑΒΓ. Η γωνία Β είναι 180 μοίρες, το ξέρω, το βρήκα πριν. Οι άλλες δύο ίσες είναι η κάθε μία έστω χ. Τότε:**

$\chi+\chi+108=180\Rightarrow$

$2\chi=180-108$

$2\chi=72\Rightarrow$

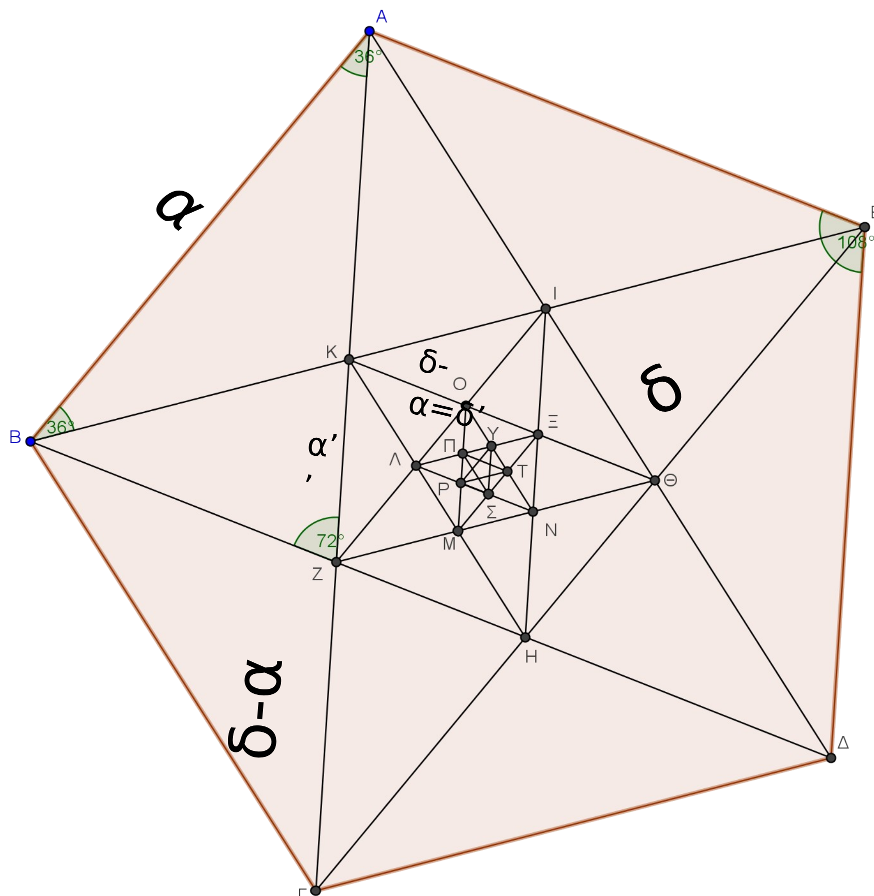
$\frac{2\chi}{2}=\frac{72}{2}\Rightarrow$

$\chi=36$

**Άρα** $\chi = \widehat{B\Gamma A} = \widehat{BA\Gamma} = 36^0$**. Ομοίως και στο άλλο ισοσκελές ΑΕΔ, έχω** $\widehat{EA\Delta} = \widehat{E\Delta A} = 36^0$**. Μετά από αυτό το αποτέλεσμα, κοιτάμε το τρίγωνο ΓΑΔ που μοιάζει να είναι ισοσκελές. Οι δύο γωνίες που μοιάζουν να είναι ίσες, είναι : Η μία** $108^0$**-**$36^0$ **=**$72^0$ **, αλλά και η άλλη** $108^0$**-**$36^0$ **=**$72^0$ **, (σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη ανακαλύψει και αποδείξει) Άρα, ΠΡΑΓΜΑΤΙ είναι ισοσκελές.** Και τότε, η γωνία ΓΑΔ, θα είναι 180-2*72=36 μοίρες. Και κατά σύμπτωση, βγαίνει (κοιτάξτε την κορυφή Α) η γωνία του πενταγώνου Α , να ΤΡΙΧΟΤΟΜΕΙΤΑΙ (=χωρίζεται σε τρία ίσες γωνίες) 36+36+36=108 μοίρες. Επίσης θα μας χρειαστεί και η παρατήρηση ότι 2*36=36+36=72.

**Τώρα βλέπουμε το παρακάτω σχήμα: Έχουμε φέρει τις 5 διαγωνίους που σχηματίζουν ένα μικρό πεντάγωνο στο κέντρο. Μετά έχουμε φέρει τις 5 διαγωνίους στο μικρό πεντάγωνο, που σχηματίζουν ένα άλλο πεντάγωνο και μετά το ίδιο, και το ίδιο, και αυτό φαίνεται να συνεχίζεται επ΄άπειρον.**

**Το αστέρι που σχηματίζεται λέγεται και «πεντάλφα» ακριβώς, διότι σχηματίζεται από επανάληψη για 5 φορές του Ελληνικού γράμματος Α. υπάρχει και ως «άστρο του Δαυΐδ» και ως σύμβολο του Ισραήλ αλλά και ως σύμβολο των Τεκτόνων, (δηλαδή,**




**των Μασόνων) . Όλα τα παραπάνω, είναι και αληθή και γνωστά. Το λιγότερο γνωστό, είναι ότι όλα αυτά τα σύμβολα είναι ακραιφνώς Ελληνικά σύμβολα και δεν έχουν επιλεχθεί τυχαία ως μυστικιστικά σύμβολα, καθώς κρύβουν (όπως αυτό εδώ) σπουδαίες Συμπαντικές αλήθειες , αλήθειες που είναι πέραν του δεκαδικού Συστήματος που περιορίζει την αντίληψή μας για την φύση των αριθμών και των μαθηματικών, καθώς όπως έχουμε πει, το δεκαδικό το έχουμε επειδή ως τέκνα της Γης, τυχαίνει να έχουμε 10 δάκτυλα. (Βλέπε προηγούμενες σημειώσεις μαθήματος) Αυτό που κρατάμε,**

**είναι ότι παγκόσμιες οργανώσεις ανθρώπων, όπως ο Τεκτονισμός , ανεξαρτήτως του αν συμφωνεί ή διαφωνεί μαζί τους κάποιος, έχουν επιλέξει Ελληνικά Σύμβολα, όπως το Πυθαγόρειο Σύμβολο του Πυθαγόρα από την Σάμο, που πήγε στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας και έφτιαξε την περιώνυμη σχολή, 550 περίπου χρόνια πριν την γέννηση του Χριστού, πέραν του περιώνυμου και σημαντικότατου θεωρήματος που απέδειξε.**

**Πάμε τώρα να καταλάβουμε τι το σπουδαίο κρύβει αυτό το σχήμα που το έχουν υιοθετήσει ως σύμβολό τους πολιτισμοί , και οργανώσεις που αναζητούν το Θείο, την Αρμονία του σύμπαντος, την αλήθεια πέραν της ζωής μας, δηλαδή, τις φιλοσοφικό-θρησκευτικές αναζητήσεις, κάτι που έκανε και η Σχολή του Πυθαγόρα.**

## Να βρεθεί η ανθυφαίρεση μεταξύ της διαγωνίου δ και της πλευράς α , όπου προφανώς α<δ.

**ΒΗΜΑ 1 (του αλγορίθμου του Ευκλείδους που εδώ το λέμε και με το γενικό όνομα –όρο Ανθυφαίρεση ή Ανταναίρεση)**

**Το α στο δ χωράει 1 φορά (βλέπε το σχήμα και περισσεύει υπόλοιπο το δ-α , όπου δ-α<α**

**Να εξηγηθεί το ΒΗΜΑ1**

**α = ΑΒ και επειδή λόγω του ισοσκελούς ΑΒΖ ΑΒ=ΑΖ=α , βλέπω ότι «το α χωρά στο δ=ΑΓ 1 φορά» και περισσεύει το ΖΓ=δ-α .**

**Πρέπει να δείξω, κατά τα γνωστά, ότι το υπόλοιπο, είναι και μικρότερο από τον διαιρέτη τον α . Δηλ. δ-α<α.**

**Πριν το αποδείξω, κοίτα στο σχήμα που έχεις, ότι λόγω ισοσκελών τριγώνων, έχω :**

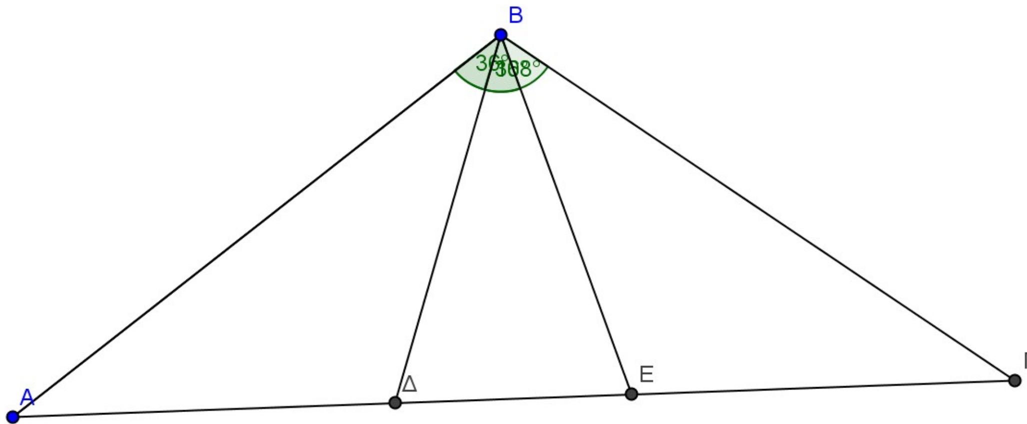
**ΖΓ=ΖΒ (το ΖΒΓ είναι ισοσκελές)**

**ΖΒ=ΚΒ (Το ΒΖΚ είναι ισοσκελές)**

**ΚΒ=ΚΑ (Το ΚΒΑ είναι ισοσκελές)**

**Τελικά έχω ΓΖ=ΒΖ=ΒΚ=ΑΚ=δ-α**

**Να δείξω τώρα και το δ-α<δ**




**Αν έχω ισοσκελές με γωνία κορυφής 108 μοίρες και τριχοτομήσω την γωνία της κορυφής (Γενικά δεν γίνεται με κανόνα και διαβήτη, αλλά ειδικά για την γωνία των 108 μοιρών γίνεται) θα έχω με τα ισοσκελή που εμφανίζονται ΑΒ=ΑΕ (Το ΑΒΕ είναι ισοσκελές) ΒΓ=ΓΔ (Το ΒΓΔ ισοσκελές) ΑΒ=ΒΓ (ΑΒΓ ισοσκελές) ΒΔ=ΒΕ (ΒΔΕ ισοσκελές)**

**Επομένως, ΑΒ=ΑΕ<ΑΓ (δηλ. δ-α<α)**

**Απέδειξα δηλαδή, ότι σε ένα ισοσκελές τρίγωνο με γωνία κορυφής 108 μοιρών, το κάθε σκέλος είναι μικρότερο από την βάση του ισοσκελούς. (Θα μας χρειάζεται αυτό το συμπέρασμα συνεχώς )**

**ΒΗΜΑ2**

**Το δ-α (=ΓΖ) χωρά στο α (=ΓΚ) 1 φορά και περισσεύει το α' (=ΚΖ) με α'<δ-α (Γιατί το τελευταίο;)**

**ΒΗΜΑ 3**

**Το α΄ στο δ-α=δ' (=ΓΖ=ΓΗ=ΗΚ λόγω ισοσκελών) χωρά όσο και το α στο δ, ΔΙΟΤΙ, είναι σχέση πλευράς κανονικού πενταγώνου και διαγωνίου του και όλα τα κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια και οι λόγοι διατηρούνται.**

**Εδώ «η…παράσταση έλαβε τέλος», διότι αφού** $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\alpha'}{\delta'}=\frac{\alpha''}{\delta''}=\frac{\alpha'''}{\delta'''}=-=-=$ ...... **λόγω της ομοιότητας, το ίδιο μοτίβο θα επαναλαμβάνεται ες αεί, εις το διηνεκές, ατελευτήτως, επ΄ άπειρον….**

**Αυτό μάλλον ανεκάλυψε ο Ίππασος και όχι το άρρητον του ρίζα 2, έτσι τουλάχιστον βασίμως εικάζει ο** Von Fritz.

Έτσι καταλήγουμε στην βεβαιότητα, ότι

Ανθυφαίρεση (α,δ)=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,……]

Είναι η πιο απλή περιοδική ανθυφαίρεση που μπορεί να σκεφθεί κάποιος.

Η σχέση των α και δ είναι άρρητη. Δηλαδή δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τα α και δ.

**Η σχέση των α και δ, είναι η σχέση της Χρυσής Τομής. Για κοιτάξτε μέσω ποίας οδού θα το ανακαλύψουμε (με σύγχρονα μαθηματικά)**

**Είπανε , ότι** $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\alpha'}{\delta'}$ **ή** $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{2\alpha-\delta}{\delta-\alpha}$ **(1)**

**(Είπαμε ήδη, ότι δ'=δ-α και εύκολα βλέπουμε, ότι α΄=δ-2(δ-α) =2α-δ (κοίτα το σχήμα)**

**Από την (1) αν κάνω την ιδιότητα ότι «σε μια αναλογία, το γινόμενο των άκρων ισούται με το γινόμενο των μέσων» (Η «χιαστί» ιδιότητα) έχω μετά από πράξεις:**

## $\delta^2-\alpha\delta-\alpha^2=0$ (2)

**Την εξίσωση (2) , μπορεί κάποιος να την δει ως δευτεροβάθμια εξίσωση, όπου άγνωστος είναι το δ (μπορεί να την δει –θεωρήσει και ως δευτεροβάθμια ως προς α.) Εδώ την θεωρώ ως δευτεροβάθμια με άγνωστο το δ.**

**Κατά τον γνωστό τύπο** $\Delta=(-\alpha)^2-4*1*(-\alpha^2)=5\alpha^2$ **. Άρα:**

**δ=** $\frac{-(-\alpha)\pm\sqrt{5\alpha^2}}{2}$ **(3) Επειδή όμως διαπραγματεύομαι ευθύγραμμα τμήματα με θετικό –φυσικά- μήκος (α>0) έχω:**

$$\delta=\frac{\alpha+\sqrt{5}\cdot\sqrt{\alpha^2}}{2}\Rightarrow$$
$$\delta=\frac{\alpha+\sqrt{5}\cdot|\alpha|}{2}\Rightarrow(\alpha>0)$$
$$\delta=\frac{\alpha+\sqrt{5}\cdot\alpha}{2}\Rightarrow$$
$$\delta=\frac{\alpha(1+\sqrt{5})}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{\delta}{\alpha}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi\ ;\ 1,62\ (\text{Με το Ελληνικό γράμμα φ συμβολίζεται διεθνώς ο λόγος της Χρυσής Τομής})$$

**(Για την <u>αισθητική αξία</u> της Χρυσής τομής στις κατασκευές, έχουν γραφεί ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ βιβλία! )**

**Δίνεται η εξίσωση :** $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^\nu}{\nu}=0$**,**

$\nu \in \mathbb{N}$

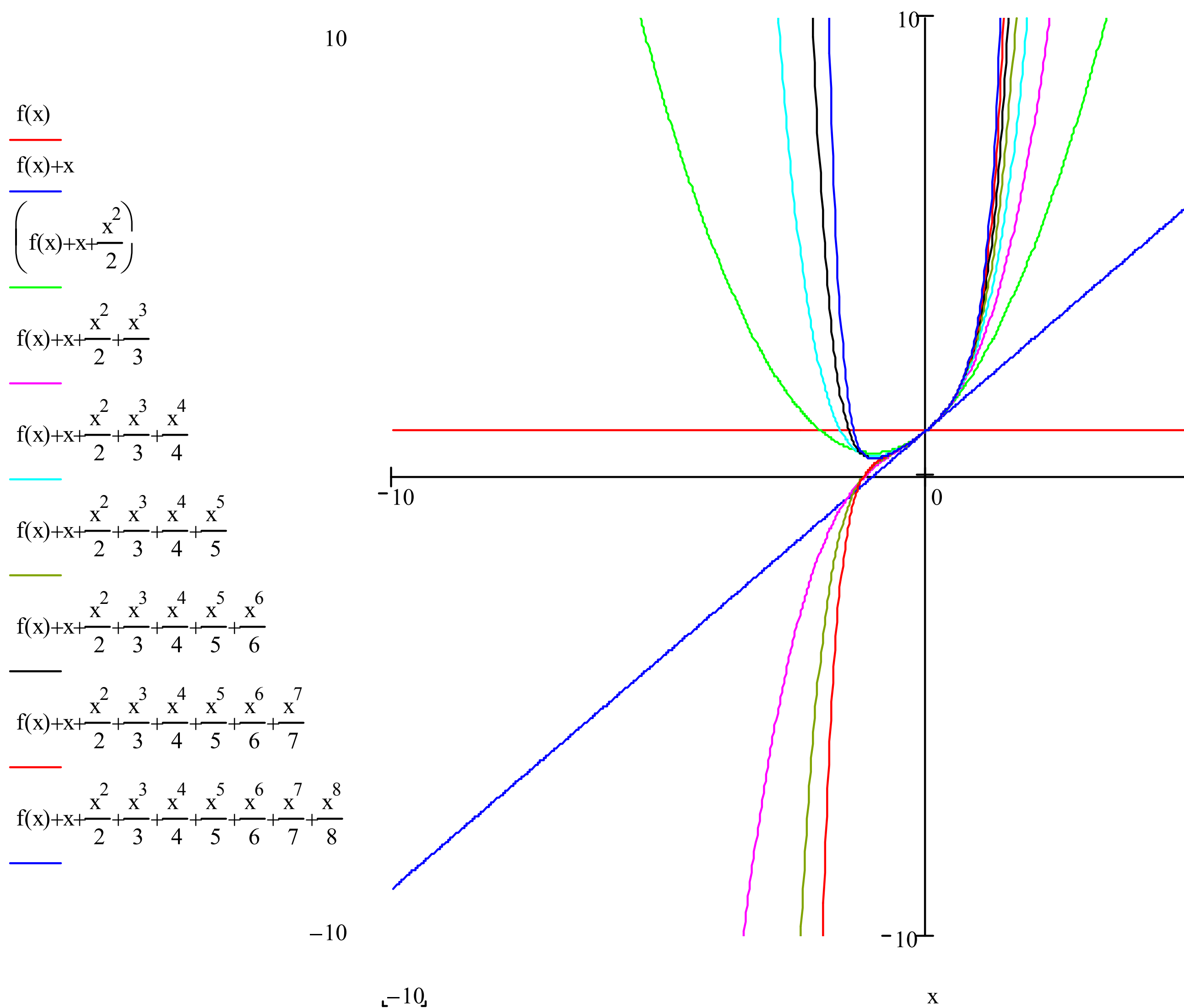
**Να εξεταστεί υπό ποίες προϋποθέσεις η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες και πόσες.**

# Απάντηση :

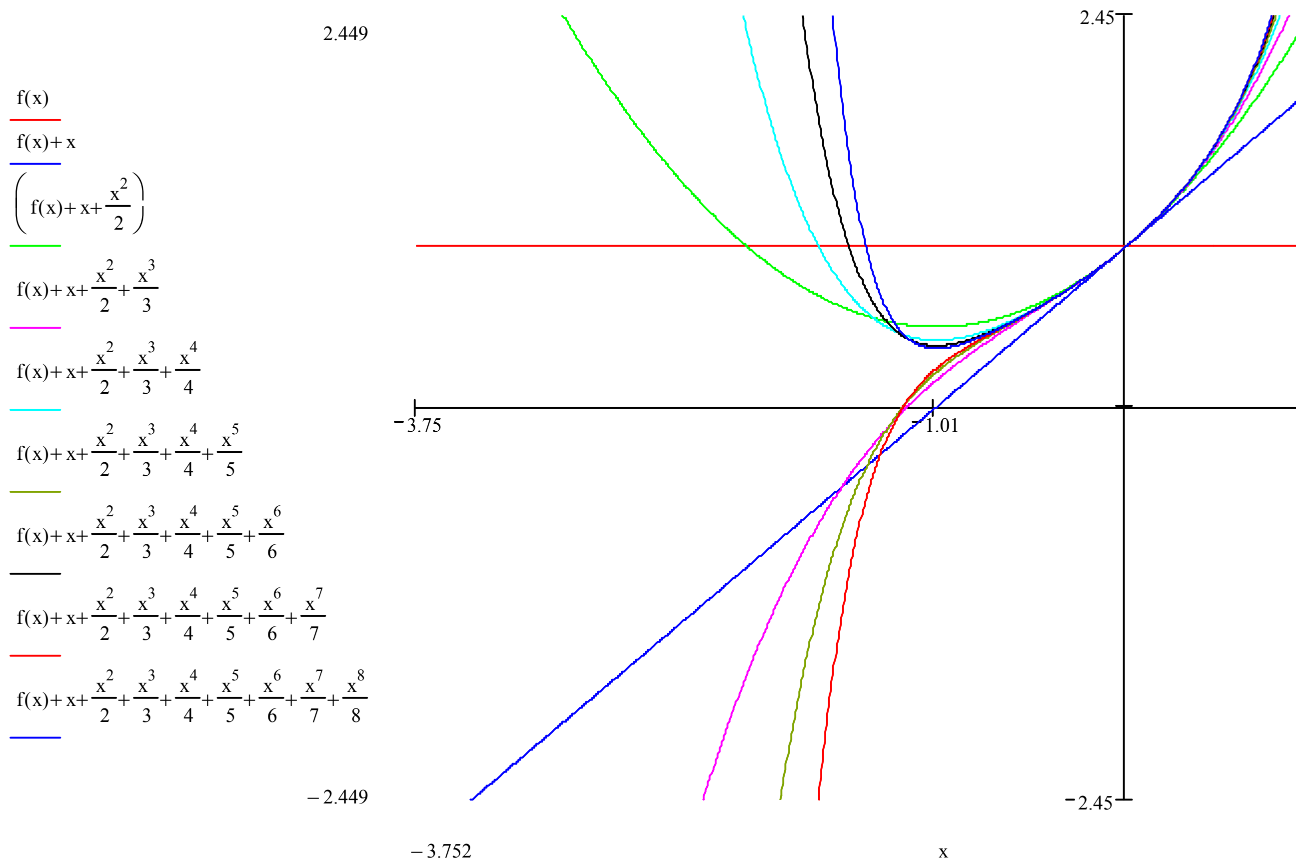
Με την βοήθεια του λογισμικού mathcad , κατασκευάζω τις συναρτήσεις

$f_\nu(x)= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^\nu}{\nu},\ \ \nu=1(1)9$

Η πρώτη εικόνα που λαμβάνω προσαρμόζοντας και τα όρια για το χ και για το ψ μεταξύ –10 και 10 είναι η παρακάτω:




**Εικόνα 1: Η πρώτη εντύπωση και η συνακόλουθη εικασία που κάνουμε, είναι ότι για άρτιο ν δεν έχω ρίζα, ενώ για περιττό ν έχω ακριβώς μία. Μάλιστα φαίνεται παραδόξως να είναι η ίδια , πράγμα που δεν συμφωνεί με την μαθηματική μας διαίσθηση, αφού κάθε μία εξίσωση προκύπτει από την προηγουμένη δια προσθέσεως ενός νέου όρου . Γι΄αυτό κάνουμε τοπική μεγέθυνση.**




**Εικόνα 2 : Με την επιλογή «Ζούμ» δεν αίρεται η αρχική μας εντύπωση περί της μιας κοινής ρίζας για όλα τα πολυώνυμα περιττού βαθμού, αλλά βεβαίως, αν υπάρχει αυτή η κοινή ρίζα, είναι έστω ρ ≠ ο . Αλλά αυτό απορρίπτεται.**

Πράγματι, αν υπάρχει κοινή ρίζα η ρ , λ.χ. για ν=3 και για ν=5 τότε θα έχω $1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/3=1+\rho+\rho^2/2+\rho^3/3+\rho^4/4+\rho^5/5 \Rightarrow$

$$\frac{\rho^4}{4}+\frac{\rho^5}{5}+0 \Rightarrow$$

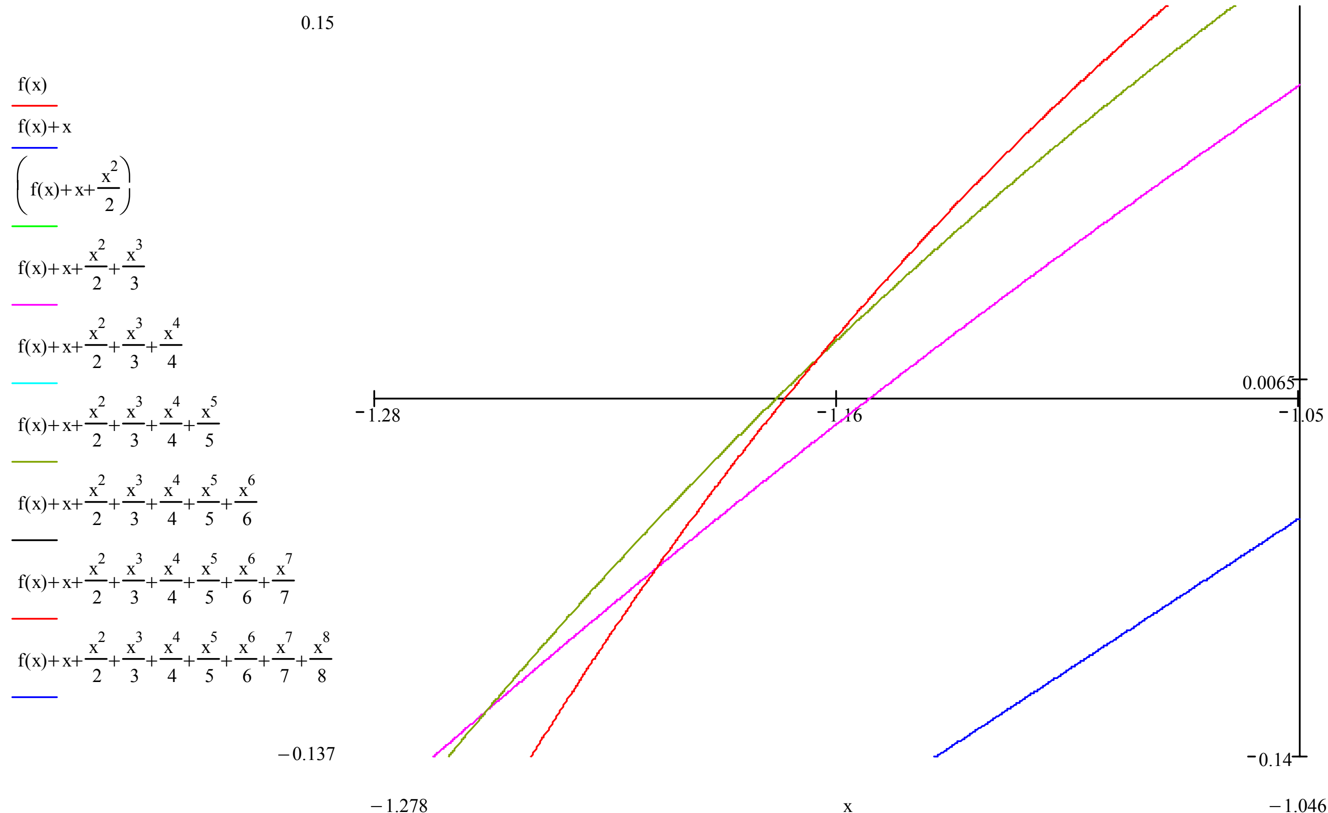
$$5\rho^4+4\rho^5=0 \Rightarrow$$

$$\rho^4(5+4\rho)=0 \Rightarrow (\rho \neq 0)$$

$$\rho=-\frac{5}{4}$$

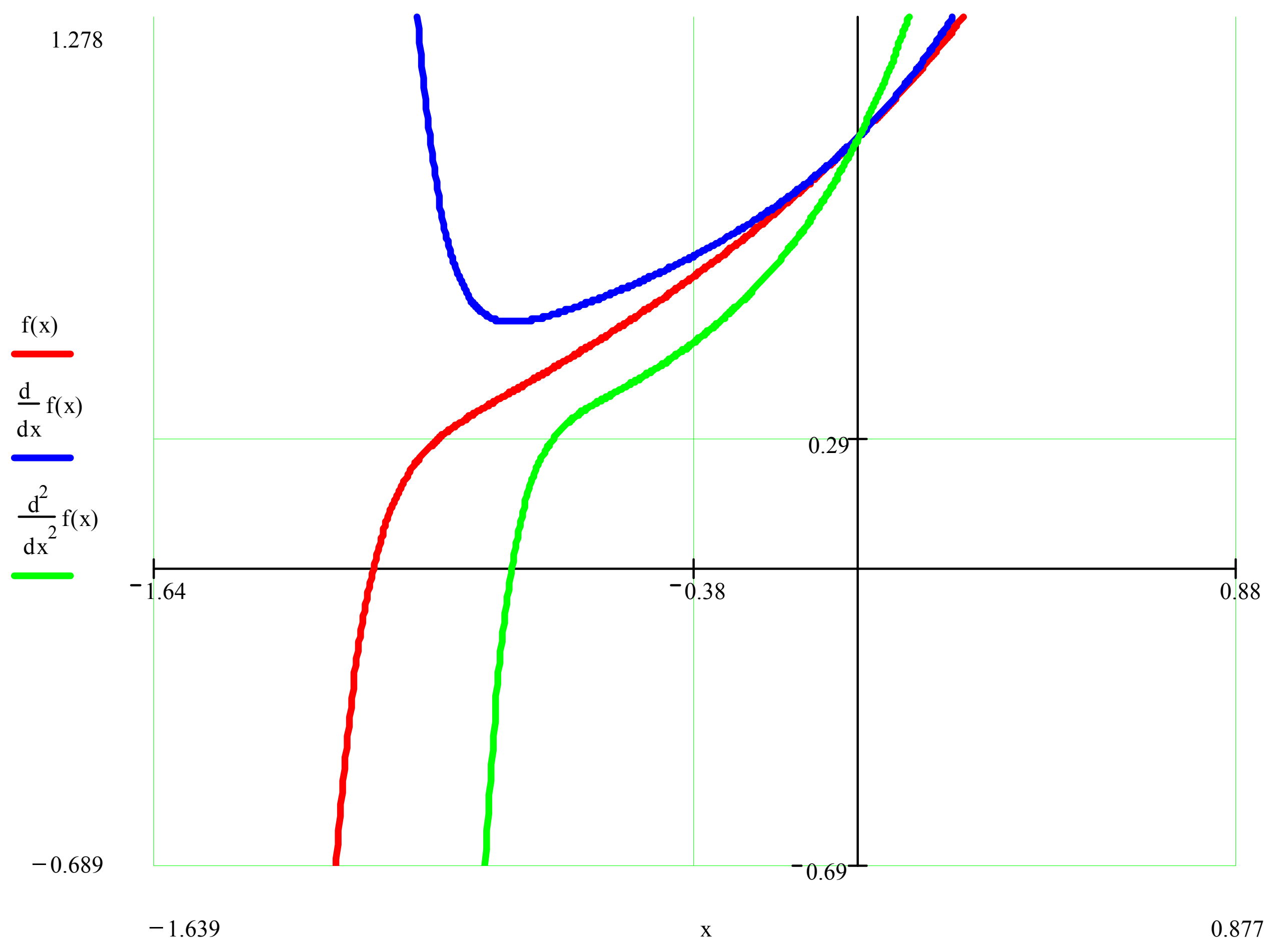
«άτοπο» , διότι –5/4 =-1,25  ενώ η επιλογή «ίχνος» μας δίνει για ψ (περίπου) ίσο με μηδέν χ=-1,16.

Παρ΄όλα ταύτα, δεν είναι ισχυρή η ένδειξη, γι ΄αυτό προβαίνουμε σε μεγαλύτερη μεγέθυνση:

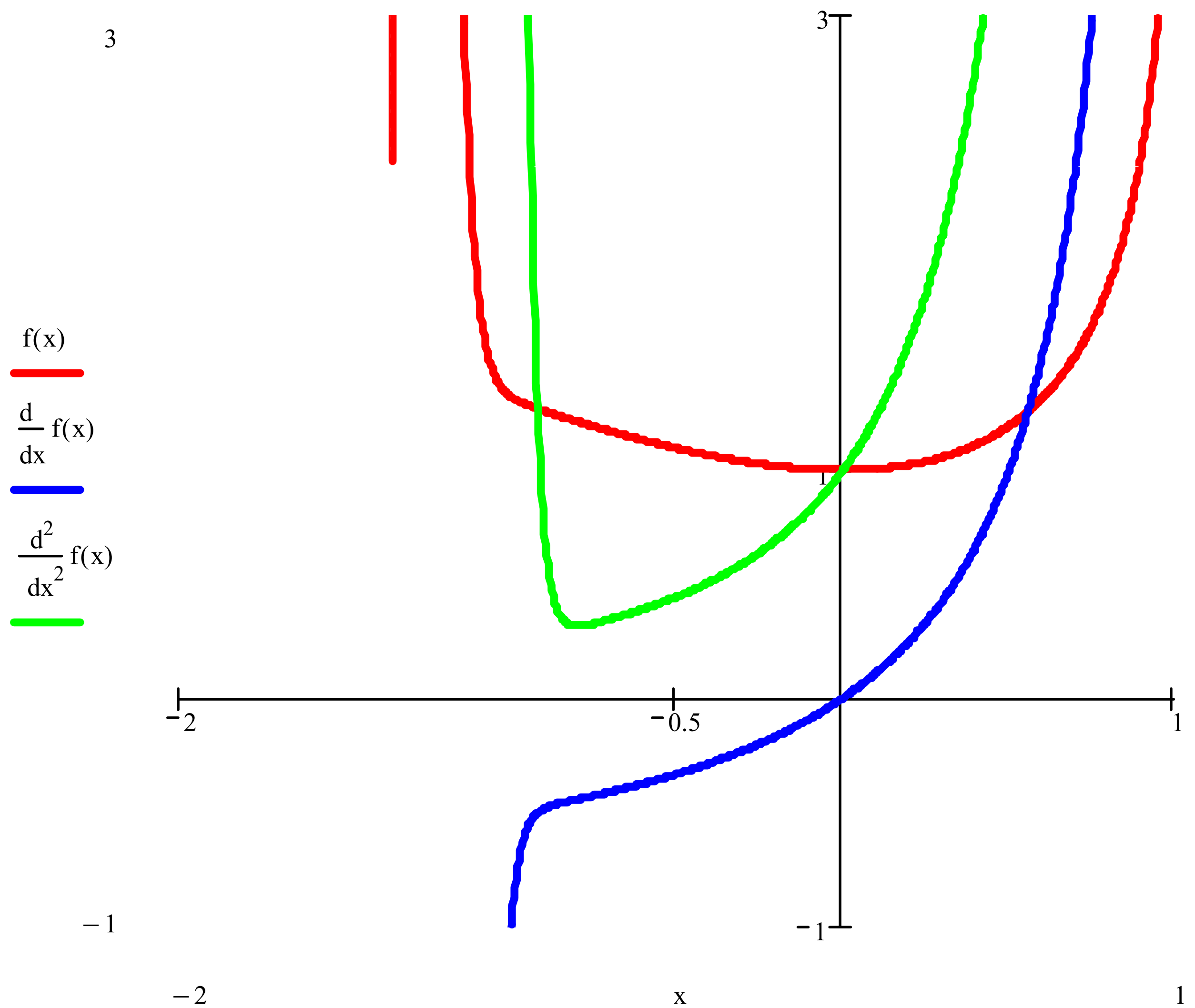



**Εικόνα 3: Τώρα καθίσταται σαφές ότι οι ρίζες είναι διακριτές , πάρα πολύ «κοντά» αλλά διαφορετικές για κάθε πολυώνυμο.**

**Εικόνα 4: ακόμα και για πολύ μεγάλες τιμές λ.χ. ν=42 , ν=43 έχουμε την ίδια συμπεριφορά .**




**Εικόνα 5 : Για ν=17 , και για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο , έχω το πιο πάνω διάγραμμα . Η f(χ)=0 έχει μία λύση , διότι η πρώτη παράγωγος (γαλάζια) είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό και ως γνησίως μονότονη στο R θα έχει μία μόνο λύση. Το σημείο μηδενισμού της δευτέρης παραγώγου,(πράσινης) μας δίνει το σημείο καμπής στην f(x)**




**Εικόνα 6: Για ν=42 και για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο έχω τα παραπάνω διαγράμματα. Εδώ δεν έχω λύση διότι 42 άρτιος**

$$f_\nu(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu}$$

Εξετάζω δύο περιπτώσεις όπως και προηγουμένως:

(i) ν=2ρ

(ii) ν=2ρ+1 , $\rho \in \mathbb{N}$

Για την πρώτη περίπτωση βρίσκω πρώτη και δεύτερη παράγωγο:

$$f_\nu'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{\nu-1} \quad (1)$$

Για καλύτερη αλγεβρική επεξεργασία , η (1) μπορεί να πάρει την μορφή

$$f_\nu'(x) = \begin{cases} \dfrac{\chi^\nu - 1}{\chi - 1}, \alpha\nu\ \chi \neq 1 \\ \nu, \alpha\nu\ \chi = 1 \end{cases}$$

$$f_\nu''(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (\nu - 1)\chi^{\nu-2}$$

$$f_\nu'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^\nu - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi^{2\rho} = 1 \Leftrightarrow (\chi \neq 1, \delta\iota o\tau\iota\ \ f'(1) = \nu)$$

$$\chi = -1$$

Άρα το -1 είναι θέση πιθανού ακροτάτου.

$f_\nu''(-1) = 1-2+3-4+5-6+\ldots\ldots-(\nu-2)+(\nu-1)$

$\Rightarrow$

$f_\nu''(-1)=(-1)3\rho \Rightarrow$

$f_\nu''(-1)=-3\rho<0$

Άρα στο –1 έχω ελάχιστη τιμή στην συνάρτηση την

$f_\nu(-1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots..+\frac{1}{\nu-2}-\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{\nu} \Rightarrow$

$f_\nu(-1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\ldots\ldots\frac{1}{(\nu-2)(\nu-1)}+\frac{1}{\nu}>0$

Δηλαδή, το ελάχιστο της συνάρτησης f(x) με πεδίο ορισμού το R , είναι θετικό .

Άρα η f(x) δεν μηδενίζεται στο R και άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις για $\nu=2\rho+1$

Τότε

$f_n''(x)=0 \Leftrightarrow$

$x^{2\rho+1}=1 \Leftrightarrow (\chi \neq 1, \delta\iota o\tau\iota\ f'(1)=\nu)$

χ=1 (απορρίπτεται λόγω της προηγούμενης συνθήκης)

Δηλ. δεν έχω ακρότατα , ενώ ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το R .

Από αυτό μπορούμε να συνάγουμε ότι θα είναι μονότονη και μη σταθερή , άρα θα τέμνει τον άξονα των χχ' και θαέχω μία ρίζα.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί και με άλγεβρα επιλύοντας την ανίσωση

$$1+x+x^2+x^3+...+x^{\nu-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\chi^{2\rho+1}-1}{\chi-1}>0 \Leftrightarrow (\chi\neq 1)$$

$$(\chi^{2\rho+1}-1)(\chi-1)>0$$

Και έχω τον παρακάτω πίνακα:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X-1 | - | - | + |
| $X^{2\rho+1}$-1 | - | - | + |
| Γ | + | + | + |

$-\infty$     -1     +1     $\infty$

Από όπου λαμβάνουμε ότι η πρώτη παράγωγος είναι θετική στο R , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και θα έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

## **Ακριβέστερος εντοπισμός των ριζών**

Παρατηρούμε ότι f(0)=1>0 για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$

$f_n(-2)=(1-2)+(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3})+(\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{5})+......+(\frac{2^{2\rho}}{2\rho}-\frac{2^{2\rho+1}}{2\rho+1}) \Rightarrow$

$f_\nu(-2)=+(-1)+......................+\frac{2^{2\rho}(1-2\rho)}{2\rho(2\rho+1)} \Rightarrow$ (Όλοι οι όροι είναι αρνητικοί)

$f_\nu(x)<0$

Επομένως, $f_\nu(0)\ f_\nu(-2)<0$ και η f είναι συνεχής και παραγωγήσιμη. Άρα με βάση το Θεώρημα του Bolzano , υπάρχει ρίζα ανάμεσα στο –2 και το 0 και όπως έχουμε ήδη δείξει είναι μοναδική και πραγματική.

**<u>Σχετικά με την προσεγγιστική μέθοδο Newton –Raphson</u>**

Για να εφαρμοσθεί η μέθοδος των Newton Raphson , θα πρέπει να εξασφαλισθεί ότι ανάμεσα στην ρίζα και το σημείο εκκίνησης, δεν έχουμε αλλαγή καμπυλότητας.

Εδώ, για ολόκληρη την οικογένεια κατάλληλο σημείο εκκίνησης είναι το –2 και όχι το 0.

Κατά τα γνωστά η ακολουθία που συγκλίνει στις ρίζες της συνάρτησης είναι:

$$\chi_\nu = \chi_{\nu-1} - \frac{f_n(x_{\nu-1})}{f_n'(x_0)} \ , \mu\varepsilon\ \chi_0 = -1 \kappa\alpha\iota\, f_n'(-1) = \frac{-1-1}{-1-1} = 1 \neq 0$$

$$\chi_\nu = \chi_{\nu-1} - f_n(x_{\nu-1}) \quad , \chi_0 = -1 \quad (n \ \ \sigma\tau\alpha\theta., \ \ \nu\, \mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\eta)$$

και $x_\nu \to \rho$

Με ένα πρόγραμμα που περιέχει επαναληπτική αναδρομική εντολή, μπορούμε να υπολογίσουμε με την βοήθεια Η/Υ όσους όρους θέλουμε από την παραπάνω ακολουθία και να υπάρχει ένα κριτήριο (αυθαίρετο) δια κοπής της διαδικασίας, όταν φθάσουμε στην εκ των προτέρων επιθυμητή ακρίβεια. Δηλαδή, μπορεί να καθορισθεί ένας εκ των προτέρων αριθμός βημάτων πέραν των οποίων διακόπτεται η διαδικασία ή εάν η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας γίνει μικρότερη από την επιθυμητή ακρίβεια.

Λόγου χάριν εάν

$\left|\chi_\nu - \chi_{\nu-1}\right| \leq 10^{-6}$ , όπου υπολογίζεται η ρίζα με προσέγγιση εκατομμυριοστού.

# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

***Ρητός:*** Είναι κάθε αριθμός $\alpha$, για τον οποίο υπάρχουν $p \in$ Ù και $q \in$ Ù$^*$ $: \alpha = \dfrac{p}{q}$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί $\left(\text{π.χ. } -7 = \dfrac{-7}{1}\right)$
- Όλοι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι ρητοί $\left(\text{π.χ. } 2{,}753 = \dfrac{2753}{1000}\right)$
- Όλοι οι δεκαδικοί περιοδικοί είναι ρητοί.

  Για παράδειγμα, αν έχω τον αριθμό

$$\alpha = 5{,}23741741741741741\ldots$$

Τότε $100.000\alpha = 523741{,}741741741741\ldots$

$$100\alpha = \quad 523{,}741741741741\ldots$$

Με αφαίρεση κατά μέλη θα έχω:

$$100.000\alpha - 100\alpha = 523741{,}741741\ldots - 523{,}741741\ldots$$

ή $$99.900\alpha = 523118{,}00000\ldots$$

ή $$\boxed{a = \frac{523118}{99.900}}$$

Υπό ευρείαν έννοια, μπορούμε να δεχθούμε, ότι και οι ακέραιοι και οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι περιοδικοί με περίοδο το 0 ή και το 9

π.χ. $5 = 5{,}0000000\ldots$

$$2{,}47 = 2{,}470000000\ldots$$

$$5 = 4{,}9999999\ldots$$

$$2{,}47 = 2{,}46999999\ldots\ .$$

Έτσι μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι:

"Ρητοί είναι οι (υπό ευρείαν έννοια) δεκαδικοί περιοδικοί και μόνον αυτοί".

Χαρακτηριστή για την αντίληψή μας περί του πλήθους των δεκαδικών

τερματιζόμενων σε σχέση με τους ρητούς μή τερματιζόμενους περιοδικούς, είναι η παρακάτω παρατήρηση:

- Ένα ανάγωγο κλάσμα $\frac{p}{q}$, παριστάνει δεκαδικό τερματιζόμενο, αν και μόνο

αν $q = 2^{\mu} \cdot 5^{\nu}$ με $\mu \in$ Í , $\nu \in$ Í .

Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να ισχυρισθούμε, ότι "σχεδόν όλοι οι ρητοί, είναι περιοδικοί, ***ακόμα και υπό την στενή έννοια***".

Παραδείγματα:

- $\frac{1}{7} = 0,\mathbf{142857\ 142857}\ldots$
- $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{75}{10^2} = \frac{75}{100} = 0,75$
- $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1,4$
- $\frac{11}{20} = \frac{11}{2^2 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{55}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{55}{100} = 0,55$ .

Ουσιαστικά δηλαδή, δεκαδικούς τερματιζόμενους ***παριστάνουν μόνο τα κλάσματα*** που μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμα με παρονομαστή δύναμη του 10.

***Άρρητος:*** Είναι κάθε αριθμός $\alpha$ που δεν είναι ρητός.

***Ύπαρξη αρρήτου:*** Ιστορικά η πρώτη ανακάλυψη αρρήτου αφορά τον $\sqrt{2}$, κάτι που έγινε από τους Πυθαγόρειους. Η απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$, επέφερε ***κλονισμό και κατάρρευση*** σε όλη τη φιλοσοφική θεώρηση και κοσμοαντίληψη των Πυθαγορείων, αφού πίστευαν ότι τα πάντα στη φύση περιγράφονται από ακέραιες αναλογίες.

***Πρόταση 1.*** Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

***Απόδειξη:*** Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχουν $p \in$ Ù και $q \in$ Ù$^*$ έτσι ώστε $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Μάλιστα, μπορώ να υποθέσω ότι $(p,q) = 1$, διότι κάθε κλάσμα δύναμαι να το απλοποιώ, καθιστώντας το ***ανάγωγο***.

Έτσι:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow \qquad (1)$$

ο $p^2$ είναι άρτιος $\Rightarrow$ (διότι κάθε περιττός δίνει περιττό τετράγωνο)

$$p = 2\lambda, \ \lambda \in \text{Í} \Rightarrow$$

$$p^2 = 4\lambda^2 \Rightarrow \qquad (1)$$

$$2q^2 = {}^2 4\lambda^2 \Rightarrow$$

$$q^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow$$

$$q^2 \text{ άρτιος } \Rightarrow$$

$q$ άρτιος, όπερ άτοπον, αφού καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι
$p$ άρτιος και $q$ άρτιος υποθέτοντας ότι τα $p$, $q$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Επομένως ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

***Αλγεβρικός:*** Είναι κάθε αριθμός $\alpha$, ο οποίος δύναται να είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές.

***Ανάγωγο Πολυώνυμο:*** Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές θα λέγεται **ανάγωγο**, όταν για κάθε ανάλυση της μορφής $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ όπου τα $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα με ακεραίους συντελεστές, να έπεται ότι $f_1(x) =$ σταθερό πολυώνυμο ή $f_2(x) =$ σταθερό πολυώνυμο.

Με άλλα λόγια, ένα πολυώνυμο $f(x)$ με ακεραίους συντελεστές θα λέγεται **ανάγωγο** όταν **δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικροτέρου βαθμού (βαθμού >0) που να έχουν επίσης ακεραίους**

**συντελεστές**.

***Πρόταση:*** Αν $f(x)$ ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού *n* και με $f(\alpha)=0$. Τότε το $f(x)$ είναι το ελαχιστοβάθμιο πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές που υπάρχει και έχει ως ρίζα τον *α*. (Η απόδειξη επαφίεται στον αναγνώστη).

***Παραδείγματα:***

- Ο $3/4$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)=4x-3$
- Ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του πολυωνύμου $q(x)=x^2-2$
- Ο $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του $\varphi(x)=x^4-4x^2+1$
- Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του $f(x)=x^3-2$.

***Βαθμός ενός αλγεβρικού αριθμού ξ:*** Κάθε αλγεβρικός αριθμός *ξ*, χαρακτηρίζεται απ'τον βαθμό του και αυτός είναι ο βαθμός του ***ελαχιστοβαθμίου*** πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές του οποίου ο *ξ* είναι ρίζα.

Έτσι:

- Κάθε ρητός αριθμός είναι αλγεβρικός βαθμού 1, αφού αν $\xi=\dfrac{p}{q}$, τότε είναι

ρίζα του $Q(x)=q\cdot x-p$ ($p\in$ Ù, $q\in$ Ù$^*$)

- Ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός βαθμού 2, αφού είναι ρίζα του $p(x)=x^2-2$, ενώ

δεν δύναται να είναι ρίζα πρωτοβαθμίου πολυωνύμου, διότι τότε αν ήταν, θα είχαμε

$$p\cdot\sqrt{2}+q=0\Rightarrow\sqrt{2}=-\frac{q}{p}\quad \text{και ο } \sqrt{2} \text{ ρητός, όπερ άτοπο.}$$

- Κάθε άρρητος αλγεβρικός, είναι βαθμού μεγαλύτερου της μονάδος.

***Υπερβατικός:*** Είναι κάθε αριθμός *ξ* ο οποίος δεν είναι αλγεβρικός.

***Ύπαρξη υπερβατικού:*** Ιστορικά, τον πρώτο υπερβατικό αριθμό τον κατασκεύασε το 1844 ο Liouville και είναι ο

$$\lim_{+\infty} x^{k+1} e^{-x} - 0^{k+1} e^{-0} + \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} = (k+1)! \Rightarrow \text{(i)} \ .$$

Για την απόδειξη της υπερβατικότητας του παραπάνω αριθμού χρειάζεται πρώτα η απόδειξη της παρακάτω πρότασης:

***Πρόταση 2*** (Liouville)***:*** Αν ο $\xi$ είναι αλγεβρικός βαθμού $\nu > 1$, τότε υπάρχει ακέραιος *M*, τέτοιος ώστε, για κάθε ρητό αριθμό $\frac{p}{q}$, να ισχύει $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^{\nu}}$.

***Απόδειξη:*** Αφού $\xi$ αλγεβρικός βαθμού *ν*, υπάρχει πολυώνυμο $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + a_1 x + \alpha_0$ με βαθμό *ν*, και $f(\xi) = 0$.

***Ισχυρισμός:*** Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρητές ρίζες.

Πράγματι· αν το $f(x)$ είχε ως ρίζα το ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρείται με το $x - \frac{\alpha}{\beta}$ και τότε

$$f(x) = \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot Q(x), \quad \forall\ x \in \text{Ñ}$$

και

$$f(\xi) = \left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot Q(\xi) \Rightarrow \left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot Q(\xi) = 0,$$

και $\xi - \frac{\alpha}{\beta} \neq 0$ αφού $\xi$ άρρητος και $\frac{\alpha}{\beta}$ ρητός.

Άρα $Q(\xi) = 0$, δηλ. ο $\xi$ είναι ρίζα πολυωνύμου βαθμού $\nu - 1$, πράγμα άτοπο, αφού το $\xi$ είναι αλγεβρικός βαθμού *ν*.

Παραγωγίζοντας το $f(x)$, λαμβάνω το $f'(x)$ το οποίο είναι επίσης πολυώνυμο $\nu - 1$ βαθμού.

Αν θεωρήσω το διάστημα $[\xi - 1, \xi + 1]$, τότε μπορώ να υποθέσω ότι το $f'(x)$ θα φράσεται σ'αυτό από τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $f'(x)$ στο ίδιο διάστημα. Δηλαδή

$$M_2 \leq f(x) \leq M_1 \quad \forall\ x \in [\xi - 1, \xi + 1] \qquad (1)$$

Θεωρώντας ως $M' = \max\{|M_1|, |M_2|\}$ η (1) γίνεται

$$-|M'| \leq M_2 \leq f'(x) \leq M_1 \leq |M'| \Rightarrow -|M'| \leq f'(x) \leq |M'|$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq |M'| \quad \forall\ x \in [\xi-1, \xi+1] \qquad (2)$$

Από το αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου (ακριβέστερα από πόρισμα αυτού) υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ με $M \geq |M'|$. Έτσι η (2) δίνει

$$|f'(x)| \leq M \quad \forall\ x \in [\xi-1, \xi+1]. \qquad (3)$$

Για τον τυχόντα ρητό $\frac{p}{q}$, $q > 0$ θα δείξω ότι

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M \cdot q^{\nu}}. \qquad (4)$$

Η (4) είναι προφανές ότι ισχύει αν $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > 1$.

Θα δείξω την ισχύ της (4) αν $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq 1$, δηλαδή για όσους ρητούς απέχουν απ'το $\xi$ απόσταση μικρότερη ή ίση της μονάδος. (Γι'αυτό άλλωστε έχω επιλέξει και το διάστημα $[\xi-1, \xi+1]$). Για το οποιοδήποτε $\frac{p}{q}$ που ανήκει στο προηγούμενο διάστημα, μπορώ να θεωρήσω το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για το διάστημα $\left[\xi, \frac{p}{q}\right]$ ή $\left[\frac{p}{q}, \xi\right]$.

Σύμφωνα μ'αυτό, υπάρχει $\gamma \in \left[\xi, \frac{p}{q}\right]$ ή $\gamma \in \left[\frac{p}{q}, \xi\right]$:

$$f'(\gamma) = \frac{f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi}$$

ή

$$|f'(\gamma)| = \frac{\left|f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{\left|\xi - \frac{p}{q}\right|} \Rightarrow$$

$$\left|f(\xi)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |\,f'(\gamma)\,|\cdot\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \Rightarrow \;(\,f(\xi)=0 \text{ διότι } \xi \text{ ρίζα του } f(x)\,)$$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |\,f'(\gamma)\,|\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \Rightarrow \tag{3}$$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le M\cdot\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \Rightarrow$$

$$q^{v}\cdot\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le q^{v}\cdot M\cdot\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \Rightarrow$$

$$\left|q^{v}\cdot f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \le q^{v}\cdot M\cdot\left|\xi-\frac{p}{q}\right|. \tag{5}$$

Ισχύει ότι $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$ από τον ισχυρισμό που αποδείξαμε στην αρχή. Άρα το α΄ μέλος της (5) είναι ακέραιος $\neq 0$.

Δηλαδή $\left|q^{v}\cdot f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\ge 1$ και η (5) δίνει

$$q^{v}\cdot M\cdot\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\ge 1 \Rightarrow \left|\xi-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{q^{v}\cdot M}. \tag{6}$$

Το α΄ μέλος της (6) είναι άρρητος (βαθμός της $\xi\neq n>1$) ενώ το β΄ μέλος είναι ρητός.

Επομένως δεν ισχύει η ισότητα.

Έτσι έχουμε το αποδεικτέο, δηλαδή

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{v}\cdot M}.$$

***Πρόταση 3*** (Liouville)***:*** Ο αριθμός $\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}$ είναι υπερβατικός.

***Απόδειξη:*** Θεωρούμε τον *N* αυθαίρετο φυσικό. Για $v>N$ συμβολίζουμε με

$$\xi_{v}=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\cdots+\frac{1}{10^{v!}}=\frac{p}{q}$$

με $q=10^{v!}$ και $p=10^{v!-1!}+10^{v!-2!}+10^{v!-3!}+\cdots+10^{v!-(v-1)!}+1$.

Ισχύει:

$$0<\xi-\frac{p}{q}=\xi-\xi_v=10^{-(v+1)!}+10^{-(v+2)!}+10^{-(v+3)!}+\cdots+10^{-(v+k)!}+\cdots$$

$$=10^{-(v+1)!}\cdot\left[1+10^{-(v+2)}+10^{-(v+2)(v+3)}+\cdots+10^{-(v+2)(v+3)\cdots(v+k)}+\cdots\right]$$

$$<10^{-(v+1)!}\cdot\left[1+2^{-(v+2)}+2^{-(v+2)(v+3)}+\cdots+2^{-(v+2)(v+3)\cdots(v+k)}+\cdots\right]$$

$$<10^{-(v+1)!}\cdot\left[1+2^{-1}+2^{-3}+\cdots+2^{-k}+\cdots\right]$$

$$=10^{-(v+1)!}\cdot 2$$

$$<10^{-v!}\cdot 2$$

$$=2\cdot q^{-v!}$$

$$<2\cdot q^{-v}$$

$$<2\cdot q^{-N}.$$

Δηλαδή τελικά $\left|\xi-\dfrac{p}{q}\right|<2\cdot q^{-N}$.

Όμως, από την πρόταση 2 και το αμέσως προηγούμενο συμπέρασμα, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι ο $\xi$ δεν είναι αλγεβρικός βαθμού μικρότερου του $N$.

Πράγματι· αν ο $\xi$ ήταν αλγεβρικός βαθμού μικρότερου του $N$, έστω $v'<N$ $(N-v'>1)$. Τότε $\forall\dfrac{p}{q}$ ρητό $\exists M\in$ Í :

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{M\cdot q^{v'}} \qquad (1)$$

και για τους συγκεκριμένους $\dfrac{p}{q}=\xi_v$ ισχύει

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<2\cdot q^{-N}. \qquad (2)$$

Από την (1) και (2) έχω:

$$\frac{1}{Mq^{v'}}<2q^{-N}\Rightarrow\frac{1}{Mq^{v'}}<\frac{2}{q^N}$$

$$\Rightarrow q^N<2Mq^{v'}$$

$$\Rightarrow q^{N-v'}<2M$$

$$\Rightarrow (10^{\nu!})^{N-\nu'} < 2M \quad \forall\, \nu > N\,.$$

Άτοπο, διότι αρκούντως μεγάλο $\nu$, υπερβαίνει τον $2M$.

Έτσι έχουμε ότι ο $\xi$ δεν είναι αλγεβρικός βαθμού μικρότερου του $N$ και ο $N$ αυθαίρετος.

Άρα ο $\xi$ δεν έχει βαθμό μικρότερο του $N$, για κάθε $N$, πράγμα άτοπο, διότι ό,τι βαθμό και να είχε ο $\xi$, κάποιος $N$ θα τον υπερέβαινε.

Άρα ο $\xi$ δεν είναι αλγεβρικός, είναι δηλαδή υπερβατικός.

***Αριθμός Liouville:*** Λέγεται ένας αριθμός $\xi$, όταν είναι άρρητος και εάν για κάθε φυσικό αριθμό $\nu$, υπάρχουν $p$ και $q$ $(q > 1)$ τέτοιοι ώστε: $\left|\xi - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^{\nu}}$.

***Πρόταση 4:*** Κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός.

***Απόδειξη:*** Υποθέτουμε ότι κάποιος αριθμός Liouville $\xi$, είναι αλγεβρικός, βαθμού $\nu$.

Τότε $\nu > 1$, αφού ο $\xi$ άρρητος.

Από την πρόταση 2, έχουμε ότι $\exists\, M \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^{\nu}} \qquad (1)$$

για κάθε $p$, $q$ ακεραίους με $q > 0$.

Επιλέγω $k \in \mathbb{N}$ :

$$2^k \geq 2^{\nu} \cdot M\,. \qquad (*)$$

Επειδή ο $\xi$ είναι αριθμός Liouville, υπάρχουν $p$, $q$ ακέραιοι $(q > 1)$ με

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}\,. \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχω $\dfrac{1}{q^k} > \dfrac{1}{Mq^{\nu}} \Rightarrow Mq^{\nu} > q^k \Rightarrow M > q^{k-\nu} \geq 2^{k-\nu} \underset{(*)}{\geq} M$ άτοπο.

Άρα κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός.

# ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΣΥΝΕΒΑΛΑΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ

***Θεώρημα των A. Thue-C.L. Siegel-K.F. Roth:*** "Αν $\xi$ είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού $\nu > 1$, και *p*, *q* ακέραιοι με $q > 0$, τότε η ανίσωση $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων σε ακεραίους *p*, *q*, για κάθε $k > 2$".

***Cantor (1873):*** "Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο, ενώ το σύνολο των υπερβατικών υπεραριθμήσιμο".

- Πρακτικά η προηγούμενη πρόταση σημαίνει ότι οι υπερβατικοί είναι "πάρα πολύ περισσότεροι" από τους αλγεβρικούς ή αλλοιώς, η πιθανότητα να επιλέξουμε αλγεβρικό τυχαία ανάμεσα από τους πραγματικούς, είναι 0 (!)

***Weierstrass:*** " Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ διαφορετικοί ανά δύο αλγεβρικοί, και $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ διαφορετικοί από το 0, τότε $\beta_1 \cdot e^{\alpha_1} + \beta_2 \cdot e^{\alpha_2} + ... + \beta_\nu \cdot e^{\alpha_\nu} \neq 0$".

***Πρόβλημα-Ερώτημα του Hilbert (1900):*** "Αν $\xi$ αλγεβρικός με $\xi \neq 0$ και $\xi \neq 1$ και $\beta$ άρρητος αλγεβρικός, τότε ο $\xi^\beta$ είναι υπερβατικός ?".

- Καταφατική απάντηση δόθηκε το 1934 από τους Gel'fand-Schneider και έτσι γνωρίζουμε σήμερα ότι αριθμοί της μορφής π.χ. $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ είναι υπερβατικοί.
- Η βασική τεχνική που δημιουργήθηκε την ίδια εποχή για την απόδειξη της υπερβατικότητας ενός αριθμού $\xi' = \xi^\beta$ συνίσταται στην απόδειξη του ότι

$$\beta \ell n \xi - \ell n \xi' \neq 0 .$$

Γενικότερα απεδείχθη το εξής:

***A. Baker (1966):*** “Αν $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ είναι μη μηδενικοί αλγεβρικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε οι $\ell n\xi_1, \ell n\xi_2, ..., \ell n\xi_\nu$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία υπεράνω του Ð, τότε $\beta_1 \ell n\xi_1 + \beta_2 \ell n\xi_2 + ... + \beta_\nu \ell n\xi_\nu \neq 0$”.

# Η ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ *e*

***Πρόταση 5:*** Ο αριθμός *e* είναι άρρητος.

***Απόδειξη:*** Από το ανάπτυγμα κατά Taylor της συνάρτησης $e^x$ έχομε:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \ldots \ .$$

Για $x = 1$ έχομε:

$$e^1 = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \ldots \Rightarrow$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \left( \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \frac{1}{(\nu+3)!} + \ldots \right) \Rightarrow$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + R_\nu \ . \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι: $0 < R_\nu < \dfrac{2}{(\nu+1)!}$.

Πράγματι˙ $R_\nu > 0$, προφανώς ως άθροισμα θετικών όρων.

Επίσης

$$R_\nu = \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \frac{1}{(\nu+3)!} + \ldots \Rightarrow$$

$$R_\nu = \frac{1}{(\nu+1)!}\left[ 1 + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)} + \ldots \right] \Rightarrow$$

$$R_\nu < \frac{1}{(\nu+1)!}\left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \right] \Rightarrow$$

(άθροισμα απείρων όρων Γ.Π. με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 1/2$)

$$R_\nu < \frac{2}{(\nu+1)!} \ .$$

Υποθέτουμε ότι ο *e* είναι ρητός. Τότε

$$e = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \quad \text{θετικούς ακέραιους.}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ($\nu > \beta$ και $\nu > 2$) $\nu \in$ Í . Τότε η (1) δίνει:

$$e = \frac{\alpha}{\beta} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + R\nu \Rightarrow \frac{\nu! \cdot \alpha}{\beta} = \nu! + \nu! + \frac{\nu!}{2!} + \ldots + \frac{\nu!}{\nu!} + \nu! \cdot R\nu$$

Στην παραπάνω ισότητα είναι παρατηρητέα τα εξής:

- Το αριστερό μέλος είναι ακέραιος (διότι $\nu > \beta$ και άρα το $\beta$ είναι παράγοντας του $\nu!$)
- Το δεξιό μέλος αποτελείται από άθροισμα ακεραίων όρων πλην του τελευταίου όρου $\nu! R_\nu$. Όμως έτσι, και ο τελευταίος όρος $\nu! R_\nu$ πρέπει υποχρεωτικά να είναι ακέραιος (ως διαφορά ακεραίων αν μεταφέρουμε τους υπόλοιπους προσθετέους στο α΄ μέλος).

Άρα

$$\left.\begin{array}{r} \nu! R_\nu \quad \text{ακέραιος} \\ \text{και} \;\; 0 < R_\nu < \dfrac{2}{(\nu+1)!} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \nu! \cdot R_\nu < \nu! \frac{2}{(\nu+1)!}$$

$$\Rightarrow 0 < \nu! \cdot R_\nu < \frac{2}{\nu+1} \underset{(\nu>2}{<} \frac{2}{3} < 1 .$$

Δηλαδή ο ακέραιος $\nu! R_\nu$ ευρίσκεται μεταξύ 0 και 1, πράγμα άτοπο.

Επομένως ο $e$ άρρητος.

# Η ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ *π*

Για την απόδειξη της αρρητότητας του $\pi$ θα χρειασθούμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις-λήμματα, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο σώμα της απόδειξης και τα οποία παραθέτουμε:

***Λήμμα Ι:*** Για την συνάρτηση $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$, $n \in$ Í (1) ισχύουν:

i. $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}$, και $0 < x < 1$

ii. $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} x^{n+k}$

iii. $f_n^{(m)}(0) = 0$ αν $m < n$ ή $m > 2n$

$f_n^{(m)}(0) =$ ακέραιος αν $n \le m \le 2n$

iv. $f_n(x) = f_n(1-x)$ και

$f_n^{(m)}(x) = (-1)^m f_n^{(m)}(1-x)$ και $f_n^{(m)}(1) =$ ακέραιος, για κάθε $m$.

(i) ***Απόδειξη του ότι*** $\boldsymbol{0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!} \quad \forall\ x \in (0,1)}$

Έχω

$$
\begin{aligned}
0 < \ &x < 1 \Rightarrow \\
0 > -&x > -1 \Rightarrow \\
1+0 > 1-&x > 1-1 \Rightarrow \\
1 > 1-&x > 0
\end{aligned}
$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη πρώτης-τελευταίας, έχομε:

$$
\begin{aligned}
&0 < x(1-x) < 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\text{Με πολ/σμό με τον εαυτό της} \\ n-1 \text{ φορές}\end{pmatrix} \\
&0^n < x^n(1-x)^n < 1^n \Rightarrow \\
&0 < x^n(1-x)^n < 1 \Rightarrow \\
&\frac{0}{n!} < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!} \Rightarrow \\
&\boxed{0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}}
\end{aligned}
$$

(ii) ***Απόδειξη του ότι*** $\boldsymbol{f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} x^{n+k}}$

Με χρήση του αναπτύγματος του Διωνύμου του Νεύτωνος έχομε:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k x^k \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n+k}$$

(iii) Γενικά μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά, ότι

$$(x^p)^{(m)} = p(p-1)(p-2)...(p-m+1)x^{p-m}.$$

Από το παραπάνω, είναι φανερά τα εξής:

- Όταν η τάξη παραγώγισης $m = p$, τότε

$$(x^p)^{(m)} = p(p-1)(p-2)...2 \cdot 1 \cdot x^0$$

$$(x^p)^{(m)} = p!$$

- Όταν $m > p$, τότε $(x^p)^{(m)} = 0$
- Όταν $m < p$ έχομε ένα μη μηδενικό μονώνυμο του *x*, δηλαδή

$$(x^p)^{(m)} = p(p-1)(p-2)...(p-m+1)x^{p-m}.$$

Από την (ii), έχομε ότι η $f_n(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}[c_0 x^n + c_1 x^{n+1} + c_2 x^{n+2} + ... + c_n x^{2n}]$$

όπου $c_0, c_1, c_2 ... c_{2n}$ ακέραιοι.

Έτσι:

- ♦ Αν η τάξη παραγώγισης *m* είναι μικρότερη από *n*, τότε η αγκύλη αποτελείται **μόνο** από μη μηδενικά μονώνυμα του *x*, συνεπώς

$$f_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}[0 + 0 + ... + 0] = 0 \quad (m < n).$$

- ♦ Αν η τάξη παραγώγισης *m* είναι μεγαλύτερη από το $2n$, τότε όλα τα μονώνυμα της αγκύλης είναι ήδη 0 και βεβαίως

$$f_n^{(m)}(0) = 0, \quad (m > 2n).$$

- ♦ Αν η τάξη παραγώγισης *m* είναι μεταξύ *n* και $2n$ συμπεριλαμβανομένων, τότε:

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}[c_0 n! + \text{ μονώνυμα του } x]$$

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!}[0 + c_1(n+1)! + \text{ μονώνυμα του } x]$$

$$f_n^{(n+2)}(x) = \frac{1}{n!}[0 + 0 + c_2(n+2)! + \text{ μονώνυμα του } x]$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!}[0 + 0 + ...0 + c_{2n} \cdot (2n)!]$$

Έτσι, για $x = 0$ έχω

$$f_n^{n}(0) = \frac{1}{n!}c_0 n!$$

$$f_n^{n+1}(0) = \frac{1}{n!}c_2(n+1)!$$

……………………

$$f_n^{(2n)}(0) = \frac{1}{n!}c_{2n}(2n)!$$

Οι οποίοι, είναι όλοι ακέραιοι.

(iv) Στην αρχική συνάρτηση, θέτωντας στη θέση του *x*, το $1 - x$, θα έχομε:

$$f_n(1-x) = \frac{(1-x)^n[1-(1-x)]^n}{n!} = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = f_n(x).$$

Παραγωγίζουμε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας (σύνθεσης συναρτήσεων) και έχω:

$$f_n^{(1)}(x) = f_n^{(1)}(1-x)\cdot(1-x)' = (-1)^1 \cdot f_n^{(1)}(1-x)$$

$$f_n^{(2)}(x) = (-1)^1 \cdot f^{(2)}(1-x)\cdot(1-x)' = (-1)^2 \cdot f^{(2)}(1-x)$$

$$f_n^{(3)}(x) = (-1)^2 \cdot f^{(3)}(1-x)\cdot(1-x)' = (-1)^3 \cdot f^{(3)}(1-x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_n^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \cdot f^{(m)}(1-x)\cdot(1-x)' = (-1)^m \cdot f_n^{(m)}(1-x) \qquad \text{ό.ε..δ.}$$

Επίσης απ'την τελευταία σχέση για $x = 1$ έχομε:

$$f_n^{(m)}(1) = (-1)^m \cdot f_n^{(m)}(0) \underset{\text{(iii)}}{=} \text{ ακέραιος, } \forall\, m.$$

***Λήμμα ΙΙ:*** Αν $\alpha \in$ Ñ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει

$$n_0' : \frac{\alpha^n}{n!} < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0'$$

***Απόδειξη:*** Αν θεωρήσουμε $n \geq |2a|$ (*) τότε

$$\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right| \cdot \left|\frac{a^n}{n!}\right| \underset{(*)}{<} \frac{1}{2}\left|\frac{a^n}{n!}\right|.$$

Γενικά για κάποιο συγκεκριμένο $n_0 \geq |2a|$ θα έχω διαδοχικά:

$$\left|\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right|$$

$$\left|\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}\right| < \frac{1}{2^2}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right|$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!}\right| < \frac{1}{2^k}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right|. \tag{1}$$

Η (1) ισχύει για κάθε $k \in$ Í . Το β΄ μέλος της (1) είναι μια μηδενική ακολουθία, αφού

$$\left.\begin{cases} \dfrac{1}{2^k} \to 0 \\ \left|\dfrac{a^{n_0}}{n_0!}\right| = c\,t \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2^k}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| \to 0.$$

Έτσι το α΄ μέλος της (1), είναι μια ακολουθία που φράσσεται απολύτως, από μηδενική. Επομένως θα είναι κι'αυτή μηδενική. Δηλαδή

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} \to 0\ \ \forall\ k \in \text{Í}^* \quad \text{ή} \quad \frac{a^n}{n!} \to 0\ \ \forall\ n > n_0 \quad \text{ή} \quad \frac{a^n}{n!} \to 0\ \ \forall\ n \in \text{Í}^*.$$

Έτσι, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, θα επιλέγουμε $n_0 > |2a|$ και στη συνέχεια

$$k_0 : \frac{1}{2^{k_0}}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| < \varepsilon \qquad \text{ή}$$

$$k_0 : \left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| < 2^{k_0}\,\varepsilon \qquad \text{ή}$$

$$k_0 : \left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{1}{\varepsilon} < 2^{k_0} \qquad \text{το οποίο υπάρχει.}$$

Τότε, το ζητούμενο $n_0'$ θα είναι το $n_0 + k_0$ και

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| < \varepsilon \;\; \forall \; n > n_0 + k_0 = n_0' .$$

***Λήμμα ΙΙΙ:*** Εάν $\pi^2$ είναι άρρητος, τότε και $\pi$ άρρητος.

***Απόδειξη:*** Έστω ότι $\pi$ ρητός. Τότε έχω $p, q \in$ Ù :

$$\pi = \frac{p}{q} \Rightarrow \pi^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \pi^2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ ρητός όπερ άτοπον.}$$

Άρα ο $\pi$ είναι άρρητος.

***Πρόταση 6:*** Ο αριθμός $\pi^2$ είναι άρρητος.

***Απόδειξη:*** Έστω ότι $\pi^2$ ρητός. Τότε υπάρχουν $\alpha \in$ Ù , $b \in$ Ù$^*$ :

$$\pi^2 = \frac{a}{b}.$$

Ορίζω τη συνάρτηση $G$ ως εξής:

$$G(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n^{(0)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right]. \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε ότι εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα στην (1), τότε για τους συντελεστές θα έχω:

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = \frac{b^n a^{n-k}}{b^{n-k}} = a^{n-k} b^k .$$

Δηλαδή, όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι αριθμοί. Επίσης από λήμμα Ι (iii) και (iv) έχω ότι

$$f_n^{(m)}(0) \quad \text{και} \quad f_n^{(m)}(1) \quad \text{ακέραιοι} \quad \forall \; m .$$

Από τα προηγούμενα, ευθέως προκύπτει, ότι

$$G(0) \quad \text{και} \quad G(1) \quad \text{είναι ακέραιοι.}$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές την $G(x)$ και έχομε:

$$G''(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right]. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος της (2) $(-1) f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ διότι η τάξη

παραγώγισης έχει υπερβεί το $2n$. (Λήμμα Ι (iii)).

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με $\pi^2$ και στη συνέχεια την προσθέτουμε κατά μέλη με την (2), όπου μετά τις απλοποιήσεις λαμβάνουμε:

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=b^n \pi^{2n+2} f_n(x) \Rightarrow$$

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} f_n(x) \Rightarrow$$

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=b^n \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} f_n(n) \Rightarrow$$

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=\pi^2 a^n f_n(x). \tag{3}$$

Θέτουμε $H(x)=G'(x)\text{ημ}(\pi x)-\pi G(x)\text{συν}(\pi x)$.

Παραγωγίζοντας της $H(x)$ λαμβάνουμε:

$$H'(x)=[G''(x)\cdot \text{ημ}\pi x+\pi\text{συν}\pi x\cdot G'(x)]-\pi\cdot[G'(x)\text{συν}\pi x\text{-}\pi G(x)\text{ημ}\pi x] \Rightarrow$$

$$H'(x)=G''(x)\text{ημ}\pi x+\pi\text{συν}\pi x\cdot G'(x)-\pi\cdot G'(x)\text{συν}\pi x+\pi^2 G(x)\text{ημ}\pi x \Rightarrow$$

$$H'(x)=[G''(x)+\pi^2 G(x)]\text{ημ}\pi x \Rightarrow \quad (\text{λόγω (3)})$$

$$H'(x)=\pi^2\cdot a^n f_n(x)\cdot \text{ημ}\pi x \Rightarrow$$

$$\int_0^1 H'(x)dx=\int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x)\text{ημ}\pi x dx \Rightarrow$$

$$H(1)-H(0)=\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\text{ημ}\pi x dx \Rightarrow$$

$$(G'(1)\text{ημ}\pi-\pi G(1)\text{συν}\pi)-(G'(0)\text{ημ}0-\pi\cdot G(0)\text{συν}0)=\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\text{ημ}\pi x dx \Rightarrow$$

$$\not{\pi}\cdot[(G(1)+G(0)]=\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\text{ημ}\pi x dx \Rightarrow$$

$$(G(1)+G(0)=\pi\cdot\int_0^1 a^n f_n(x)\text{ημ}\pi x dx. \tag{4}$$

Το α΄ μέλος της (4) είναι ακέραιος αριθμός, άρα και το β΄.

Εξάλλου από το Λήμμα Ι (i) ισχύει:

$$0<f_n(x)<\frac{1}{n!}, \quad \text{για} \quad 0<x<1 \Rightarrow$$

$$0\cdot\pi a^n\text{ημ}\pi x<\pi a^n\text{ημ}x\cdot f_n(x)<\frac{\pi a^n}{n!}, \text{ για } 0<x<1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 0dx < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \eta\mu\pi x dx < \int_0^1 \frac{\pi a^n}{n!} dx \Rightarrow$$

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \eta\mu\pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!} \qquad (5)$$

Η σχέση (5) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το λήμμα ΙΙ, υπάρχει $n_0$, έτσι ώστε

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1 \quad \forall\ n > n_0 .$$

Έτσι η (5), αφού λάβουμε υπ’όψιν και την (4) δίνει ακέραιο μεταξύ 0 και 1, πράγμα που είναι άτοπο.

Επομένως ο $\pi^2$ είναι άρρητος και από Λήμμα ΙΙΙ έπεται ότι $\pi$ άρρητος.

# Η ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ *e*

Για την απόδειξη της υπερβατικότητας του *e*, θα χρειασθούμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις-λήμματα τις οποίες παραθέτουμε:

**Λήμμα IV:** • (i) Εάν $p$ πρώτος και $\nu$ φυσικός με $(p,\nu)\neq 1$ (: δεν είναι πρώτοι προς αλλήλους), τότε $\nu = \text{πολ}\, p$.

- (ii) Εάν όμως $\nu \neq \text{πολ}\, p$ τότε $(p,\nu)=1$.
- (iii) Αν $p$ πρώτος και $p/\alpha\cdot\beta$ τότε ($p/\alpha$ ή $p/\beta$)
- (iv) Αν ($p\nmid\alpha$ και $p\nmid\beta$) τότε $p\nmid\alpha\beta$
- (v) Αν ($p\nmid\alpha_1, p\nmid\alpha_2 ... p\nmid\alpha_\nu$) τότε $p\nmid\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu$
- (vi) Αν $p$ πρώτος και $\nu$ φυσικός με $p>\nu$ τότε $p\nmid(\nu!)^p$
- (vii) Αν το $p$ διαιρεί τους όρους ενός αθροίσματος πλην ενός, τότε δεν διαιρεί το άθροισμα.

***Απόδειξη:*** (i) Έστω ότι $(p,\nu)=\delta>1$.

Τότε $\qquad \delta/p \Rightarrow$ (επειδή $p$ πρώτος)

$$(\delta=1 \text{ ή } p)\Rightarrow(\delta\neq 1)$$

$$\delta = p \qquad (1)$$

Έτσι $\qquad \delta/\nu \underset{(1)}{\Rightarrow} p/\nu \Rightarrow \boxed{\nu = \text{πολ}\, p}$

(ii) Πρόκειται για την αντιθετοαντίστροφη πρόταση (i) άρα ισχύει.

(iii) Για την απόδειξη αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας αριθμών που είναι το εξής: "Αν $(\alpha,\beta)=1$, τότε $\exists x\in$ Ù και $y\in$ Ù : $\alpha x+\beta y=1$".

Έτσι έχουμε:

Αν ($p/\alpha\beta$ και $p\nmid\alpha$) $\Rightarrow$ ($p/\alpha\beta$ και $\alpha\neq\text{πολ}\, p$)

$$\underset{\substack{\text{Λήμμα IV}\\ \text{(ii)}}}{\Rightarrow} (p/\alpha\beta \text{ και } (p,\alpha)=1) \qquad (2)$$

Όμως, από το θεμελιώδες θεώρημα της Θεωρίας Αριθμών, υπάρχει

$(x,y)\in \text{Ù}\times\text{Ù} : px+\alpha y=1$.

Έτσι η (2) γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha\beta = k\cdot p \\ px+ay=1 \end{cases} k\in \text{Ù} \qquad \begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}$$

Επιλύομαι την (4) ως προς $\alpha$ και αντικαθιστούμε στην (3):

(Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y\neq 0$, διότι αν $y=0$, τότε $p=1$ και το συμπέρασμα καθίσταται προφανές, αφού $1/\beta$).

Έτσι: $$\frac{1-px}{y}\cdot\beta = kp \Rightarrow kyp=\beta(1-px)\Rightarrow$$

$$kyp=\beta-\beta px \Rightarrow (ky+\beta x)p=\beta \Rightarrow$$

$$\beta = \text{πολ}\, p \Rightarrow p/\beta .$$

Ομοίως δείχνουμε ότι αν $(p/\alpha\beta$ και $p\nmid\beta)$ τότε $p/\alpha$.

Έτσι τελικά έχουμε την αποδεικτέα, δηλαδή

Αν $(p/\alpha\beta)$ τότε $(p/\alpha$ ή $p/\beta)$.

(iv) Πρόκειται για την αντιθετοαντίστροφη πρόταση (iii), άρα ισχύει.

(v) Η ισχύς της προτάσεως για $\nu=2$ απεδείχθη στο (iii).

Υποθέτουμε ότι: Αν $(p\nmid\alpha_1, p\nmid\alpha_2,..., p\nmid\alpha_k)$ τότε

$$p\nmid \alpha_1\cdot\alpha_2...\alpha_k \qquad (5)$$

Θα δείξουμε ότι: Αν $(p\nmid\alpha_1, p\nmid\alpha_2,..., p\nmid\alpha_k, p\nmid\alpha_{k+1})$ τότε

$$p\nmid \alpha_1\cdot\alpha_2...\alpha_k\cdot\alpha_{k+1} \qquad (6)$$

Από (5) έχομε $p\nmid\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$ και από υπόθεση της (6) έχομε $p\nmid\alpha_{k+1}$.

Τότε από την ισχύ της πρότασης για $\nu=2$, έχομε ότι $p\nmid(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k)\alpha_{k+1}$ δηλαδή $p\nmid\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\alpha_{k+1}$, που είναι η αποδεικτέα.

(vi) Αν $p>\nu$, είναι προφανές ότι ο $p$ δεν διαιρεί τον $\nu$ και οποιονδήποτε μικρότερό του . Δηλαδή

$$p\nmid\nu, p\nmid(\nu-1),..., p\nmid 2, p\nmid 1 \underset{(\text{v})}{\Rightarrow} p\nmid \nu!$$

Επίσης

$$\underbrace{(p \nmid \nu!, p \nmid \nu!, ..., p \nmid \nu!)}_{p \text{ επαναλήψεις}} \underset{(\nu)}{\Rightarrow} p \nmid (\nu!)^p .$$

(vii) Αν $p \mid \alpha_1, p \mid \alpha_2 ... p \mid \alpha_k$ και $p \nmid a_{k+1}$, τότε αν θέσουμε

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_k + \alpha_{k+1} \Rightarrow$$

$$M = \pi_1 p + \pi_2 p + \pi_3 p + .... + \pi_k p + \alpha_{k+1} \Rightarrow$$

$$M = p(\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_k) + \alpha_{k+1} . \qquad (7)$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι $p / M$ , τότε $M = p\pi$ και η (7) δίνει

$$p\pi - p(\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_k) = \alpha_{k+1} \Rightarrow$$

$$p(\pi - \pi_1 - \pi_2 - ... - \pi_k) = \alpha_{k+1} \Rightarrow p / a_{k+1} \quad \text{άτοπο.}$$

***Λήμμα V:*** Ισχύουν:

(i) $\lim\limits_{+\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0, \quad n \in$ Í

(ii) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \quad n \in$ Í $\qquad (1)$

***Απόδειξη:***

(i) $\lim\limits_{+\infty} x^n \cdot e^{-x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{x^n}{e^x}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του de’ Hospital $n$ φορές

και έχομε:

$$\lim_{+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{+\infty} \frac{(x^n)^{(n)}}{(e^x)^{(n)}} = \lim_{+\infty} \frac{n!}{e^x} = n! \lim_{+\infty} \frac{1}{e^x} \underset{e>1}{=} n! \frac{1}{\infty} = 0 .$$

(ii) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

- Για $n = 0$ έχω

$$\int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} = \int_0^{+\infty} e^{-x} = -\int_0^{+\infty} (e^{-x})' = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = -\lim_{+\infty} e^{-x} + e^{-0} = 0 + 1 = 1 = 0!$$

- Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για $n = k$ δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} x^k \cdot e^{-x} = k! \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι $\int\limits_0^{+\infty} x^{k+1} \cdot e^{-x} = (k+1)! \qquad (3)$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2) με $(k+1)$ και έχομε:

$$(k+1)\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} = (k+1)\cdot k! \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} (k+1)x^k e^{-x} = (k+1)! \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} (x^{k+1})' e^{-x} = (k+1)! \Rightarrow$$

$$[x^{k+1}e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x^{k+1}(e^{-x})' = (k+1)! \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty} x^{k+1}e^{-x} - 0^{k+1}e^{-0} + \int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{-x} = (k+1)! \Rightarrow \text{ (i)}$$

$$0 - 0 + \int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{-x} = (k+1)! \quad \text{που είναι η (3).}$$

Άρα $$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n_0! \quad \forall\, n \in \text{Í} .$$

***Θεώρημα:*** Ο $e$ είναι υπερβατικός.

***Απόδειξη:*** Έστω ότι ο $e$ είναι αλγεβρικός. Τότε θα υπάρχει πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές του οποίου το $e$ θα είναι ρίζα. Έστω $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_0,\ldots,a_n \in$ Ù με $a_n \neq 0$ το πολυώνυμο αυτό.

Ορίζουμε τους αριθμούς $M, M_1,\ldots,M_n$ και $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ ως εξής.

$$M = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}[(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

$$M_k = e^k \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}[(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

$$e_k = e^k \int_0^{\infty} \frac{x^{-p}[(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

Ο $p$ παριστά ένα πρώτο αριθμό τον οποίο θα επιλέξουμε στη συνέχεια.

$$[(x-1)\ldots(x-n)] = x^n + \ldots \pm n! \Rightarrow$$

$$[(x-1)\ldots(x-n)]^p = x^{np} + \ldots + (n!)^p .$$

Έτσι το $M$ γίνεται:

$$M=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}(c_{np}x^{np}+...+c_0)e^{-x}}{(p-1)!}dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{(c_{np}x^{np+p-1}+...+c_0x^{p-1})e^{-x}}{(p-1)!}$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty c_{np}x^{np+p-1}e^{-x}dx+...+\frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty c_0x^{p-1}e^{-x}dx$$

$$=\sum_{a=0}^{np}\frac{1}{(p-1)!}c_a\int_0^\infty x^{p-1+a}e^{-x}dx$$

όπου οι $c_a$ είναι ακέραιοι και $c_0=\pm(n!)^p$.

Αλλά από Λήμμα V(ii)

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}dx=k!.$$

Άρα

$$M=\sum_{a=0}^{np}c_a\frac{(p-1+a)!}{(p-1)!}. \qquad (1)$$

Για $a=0$ παίρνουμε τον όρο $c_0\frac{(p-1+0)!}{(p-1)!}=\pm(n!)^p\frac{(p-1)!}{(p-1)}=\pm(n!)^p$.

Αν μάλιστα θεωρήσουμε $p>n$, τότε ο $(n!)^p$ δεν διαιρείται με το *n*, (Λήμμα IV vi) ενώ για κάθε $a>0$ έχουμε τους όρους:

$$c_a\frac{(p-1+a)!}{(p-1)!}=c_a(p+a-1)(p+a-2)...p$$

που διαιρούνται όλοι με το *p*.

Άρα ο *M*, είναι ένας ακέραιος που γράφεται ως άθροισμα προσθετέων διαιρετών με το *p*, πλην ενός που δεν διαιρείται με το *p*.

Άρα (Λήμμα IV, (vii)) ούτε ο *M* διαιρείται με το *p*.

Θα εξετάσουμε τώρα τον $M_k$. Έχουμε:

$$M_k=e^k\int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)...(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}dx$$

$$=\int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)...(x-n)]^p e^{-(x-k)}}{(p-1)!}dx.$$

Θέτουμε $u = x - k \Rightarrow du = dx$

για $x = k \Rightarrow u = 0$

για $x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$.

Άρα τα όρια ολοκλήρωσης αλλάζουν σε 0 και $\infty$ επομένως

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\dots u \dots(u+k-n)]^p e^{-u}}{(p-1)!} du .$$

Επειδή ο παράγοντας $u$ μέσα στην αγκύλη βρίσκεται στην $k$-θέση και η $p$-δύναμη αυτής περιέχει τον παράγοντα $u^p$ ολόκληρη η παράσταση

$$(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\dots u \dots(u \pm k-n)]^p$$

είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, του οποίου κάθε όρος έχει βαθμό τουλάχιστον $p$.

$$[(u+k-1)\dots u \dots(u+k-n)]^p = D'_{np}u^{np} + \dots + D'_1 u^p$$

όπου $D'_{np} = 1$

$$(u+k)^{p-1} = u^{p-1} + \dots + k^{p-1}$$

$$(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\dots u \dots(u+k-n)]^p =$$

$$(u^{p-1} + \dots + k^{p-1})(D'_{np}u^{np} + \dots + D'_{np}u^{np} + \dots + D'_1 u^p) =$$

$$D_{np}u^{(n+1)p-1} + \dots + D_2 u^{p+1} + D_1 u^p$$

άρα

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(D_{np}u^{(n+1)p-1} + \dots + D_2 u^{p+1} + D_1 u^p)e^{-u}}{(p-1)!} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{D_{np}u^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} e^{-u} du + \dots + \int_0^\infty \frac{D_1 u^p}{(p-1)!} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} D_{np} \int_0^\infty u^{(n+1)p-1} e^{-u} du + \dots + \frac{1}{(p-1)!} D_1 \int_0^\infty u^p e^{-u} du$$

$$= \sum_{a=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_a \int_0^\infty u^{p-1+a} e^{-u} du \overset{\text{Λήμμα V(ii)}}{=} \sum_{a=1}^{np} D_a \frac{(p-1+a)!}{(p-1)!}$$

όπου οι $D_a$ είναι ακέραιοι.

Κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος διαιρείται με το $p$ έτσι κάθε $M_k$ είναι ένας ακέραιος που διαιρείται με $p$.

Επειδή το $e$ υποθέσαμε ότι το $e$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$, τότε $a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + ... + a_0 = 0, \;\; a_n \neq 0$.

Αντικαθιστώντας σ'αυτό τις σχέσεις

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M} \quad k = 1,2,...,n$$

έχουμε

$$a_n \frac{M_n + \varepsilon_n}{M} + a_{n-1}\frac{M_{n-1} + \varepsilon_{n-1}}{M} + ... + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$a_n(M_n + \varepsilon_n) + a_{n-1}(M_{n-1} + \varepsilon_{n-1}) + ... + a_0 M = 0 \Rightarrow$$

$$(a_n M_n + ... + a_1 M + a_0 M) + (a_1\varepsilon_1 + ... + a_n\varepsilon_n) = 0 \qquad (*)$$

Χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα υποθέτουμε ότι $p > |a_0| \Rightarrow p \nmid a_0$.

Άρα ο $M$ και ο $a_0$ δεν διαιρούνται με $p$ κατά συνέπεια (Λήμμα IV (iv)) και ο $a_0 M$ δεν διαιρείται με $p$.

Αφού κάθε $M_k$ διαιρείται με $p$, τότε ο αριθμός $a_1 M_1 + ... + a_n M_n$ διαιρείται με $p$ και από Λήμμα IV(viii) ο αριθμός $a_0 M + a_1 M_1 + ... + a_n M_n$ δεν διαιρείται με $p$.

Ειδικότερα η επιλογή του $M$ μπορεί να γίνει κατά τέτοιο τρόπο ώστε αναγκαστικά να είναι μη-αρνητικός ακέραιος.

Για να οδηγηθούμε σε αντίφαση και να δείξουμε ότι ο $e$ είναι υπερβατικός αρκεί να δείξουμε ότι ο

$$|a_1\varepsilon_1 + ... + a_n\varepsilon_n| \to 0 \qquad (1)$$

επιλέγοντας αρκετά μεγάλο $p$.

Για να δείξουμε την (1) αρκεί να δείξουμε ότι $|\varepsilon_k| \to 0 \;\; \forall \; k = 1,2,...,n$.

Επειδή $n$ σταθερός αριθμός (βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης), αν $1 \leq k \leq n$ τότε από

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M} \Rightarrow \varepsilon_k = e^k M - M_k$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_k| = |e^k M - M_k| \leq |e^k M| + |M_k| \leq |e^k M|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_k| \le e^k \int_0^k \frac{|x^{p-1}[(x-1)...(x-n)]^p|\, e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

$$\le e^n \int_0^n \frac{n^{p-1}\,|[(x-1)...(x-n)^p|\, e^{-x}}{(p-1)!} dx$$

διότι από $0 \le x \le n \Rightarrow x^{p-1} \le n^{p-1}$.

Αν $A = \max|(x-1),...,(x-n)|$ για $x \in [0,n]$, τότε

$$|\varepsilon_k| \le e^n \int_0^n \frac{n^{p-1} A^p e^{-x}}{(p-1)!} dx \le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^n e^{-x} dx \qquad (2)$$

και επειδή το ολοκλήρωμα $\int_0^n e^{-x} dx$

για $\qquad -x = \omega \Rightarrow -dx = d\omega \Rightarrow dx = -d\omega$

για $\qquad x = 0 \Rightarrow \omega = 0$

$\qquad x = n \Rightarrow \omega = -n$

δίνει ότι

$$\int_0^n e^{-x} dx = -\int_0^{-n} e^{\omega} d\omega = \int_{-n}^0 e^{\omega} d\omega = [e^{\omega}]_{-n}^0 = e^0 - e^{-n} = \frac{e^n - 1}{e^n} < 1. \qquad (3)$$

Έτσι η (2) λόγω (3) γίνεται:

$$|\varepsilon_k| \le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \le \frac{e^n n^p A^p}{(p-1)!} = \frac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}$$

και επειδή το $n \cdot A$ είναι σταθερά, τότε ο αριθμός $\frac{(nA)^p}{(p-1)!}$ μπορεί να γίνει μικρότερος από οποιονδήποτε $\varepsilon > 0$, αν πάρουμε το $p$ αρκετά μεγάλο (Λήμμα II). Δηλαδή $|\varepsilon_k| < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0$. Έτσι $\varepsilon_k \to 0$ και ισχύει η (1).

Κατά συνέπεια, από (*) δεν μπορεί το άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών να είναι μηδέν!

# Η ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ $\pi$

***Ιστορία και σκιαγράφηση της απόδειξης:*** Η απόδειξη $\pi$ που θα παρουσιασθεί, αφείλεται στον Lindemann και πραγματοποιήθηκε το 1882. Εκείνη η χρονιά θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως το τέλος μιας υπερπροσπάθειας που είχε αρχίσει απ'τους Αρχαίους Έλληνες και αναφέρετο στον τετραγωνισμό του κύκλου με κανόνα και διαβήτη. Είναι γνωστό, ότι το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος μήκους $\sqrt{\pi}$. Το γεγονός ότι ο $\pi$ είναι αποδειχθεί ότι ήταν άρρητος, δεν απαγόρευε την κατασκευή του με κανόνα και διαβήτη, αφού και οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ κτλ. είναι άρρητοι μεν, αλλά κατασκευάσιμοι ευκόλως με την βοήθεια και του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η απόδειξη της υπερβατικότητας του $\pi$ έθεσε τέρμα στις προσπάθειες τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη, αφού μόνο αλγεβρικοί αριθμοί είναι κατασκευάσιμοι.

Η απόδειξη της υπερβατικότητας του $\pi$, έχει αξιοσημείωτες ομοιότητες με την απόδειξη της υπερβατικότητας του $e$!

Βεβαίως το προηγούμενο δεν είναι και τόσο παράξενο, αν σκεφθεί κάποιος ότι οι αριθμοί $e$ και $\pi$ δεν είναι τελείως άσχετοι, αλλά συνδέονται με μια εξαιρετικά απλή, όσο και όμορφη σχέση, γνωστότερη ως σχέση του Euler δηλ. $e^{i\pi} = -1$.

Την σχέση αυτή θα αποδείξουμε πριν την κύρια απόδειξη, αφού θα μας χρειασθεί ως λήμμα.

Επίσης θα μας χρειασθεί και η πρόταση ότι *"το γινόμενο δύο αλγεβρικών αριθμών είναι αλγεβρικός"*.

Η απόδειξη της παραπάνω βοηθητικής πρότασης, είναι αρκετά εκτεταμένη, αοφύ προϋποθέτει θεωρία των αλγεβρικών επεκτάσεων σωμάτων. Παρόλα ταύτα, δεν θα αφεθεί αναπόδεικτη. Όμως, η παρακολούθηση της απόδειξης, προϋποθέτει κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις και ορισμούς, οι οποίες προϋποτίθενται. Αυτές είναι: Ορισμοί *δακτυλίου, σώματος και υποσώματος.* Ορισμοί *διανυσματικού χώρου, υποχώρου, γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα*

*και γραμμικώς εξηρτημένα. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου.* Ακόμη για την απόδειξη της υπερβατικότητας του $\pi$ θα χρειασθούν και κάποιες ιδιότητες των *συμμετρικών πολυωνύμων* όπως και των *στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων* τις οποίες θα αποδείξουμε.

Τέλος θα χρειασθούμε μια βοηθητική συνάρτηση την

$$F(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} \cdot x^{p-1} \cdot (c_0 x^\tau + \ldots + c_\tau)^p$$

της οποίας μας ενδιαφέρουν οι παράγωγοι διαφόρου τάξεως (έως και $p$ συγκεκριμένα).

Η διαδικασία αρχίζει με την απόδειξη του παρακάτω:

***Λήμμα VI:*** Ισχύει η ισότητα $e^{i\pi} = -1$ (Euler)

***Απόδειξη:*** Από σειρές Taylor για $z \in \hat{A}$ έχουμε:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots \; .$$

Θέτουμε όπου $z$ το $iz$:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= \cos z + i \sin z \Rightarrow iz \end{aligned}$$

$$e^{iz} = \sigma\upsilon\nu z + i\eta\mu z \overset{z=\pi}{\Rightarrow} e^{i\pi} = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{i\pi} = -1}$$

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΝ

***Ορισμός 1:*** Έστω $F$ σώμα. Τότε ορίζουμε ως *δακτύλιο των πολυωνύμων της μεταβλητής* $x$:

$$F[x] = \{a_\nu x^\nu + ... + a_1 x + a_0 \,/\, a_i \in F,\ i = 0,1,2,...,\nu \text{ και } \nu = 0,1,2,...\}$$

Αν $a_\nu \neq 0$ τότε ορίζεται ως βαθμός του $f(x) = a_\nu x^\nu + ... + a_0$ ο αριθμός $\nu$ και γράφομε βαθμ$f(x) = \nu$ ή $\deg f(x) = \nu$. Ας σημειωθεί ότι το $F[x]$ δεν είναι σώμα, διότι π.χ. $x \in F[x]$ ενώ $x^{-1} \notin F[x]$.

***Σημείωση:*** Για τις ανάγκες της απόδειξής μας για το $\pi$, αρκεί κάθε φορά να έχομε στο μυαλό μας ότι το σώμα $F$ είναι το σύνολο των ρητών Ð. Παρόλα αυτά, θα δώσουμε στην συνέχεια γενικότερο ορισμό για το *αλγεβρικό στοιχείο επί σώματος*, όπως και της έννοιας *βαθμού αλγεβρικού στοιχείου*.

Οι γενικότεροι ορισμοί γενικεύουν και το θέμα, ενώ η θεώρηση του θέματος των πολυωνύμων με ακεραίους ή ρητούς συντελεστές μπορεί να αντιμετωπισθεί ισοδύναμα, *διότι κάθε πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές, μπορεί με πολλαπλασιασμό με το ΕΚΠ των παρονομαστών να μετατραπεί σε πολυώνυμο ακεραίων συντελεστών ιδίου βαθμού, με ίδιες ρίζες* και να εξακολουθεί να είναι ανάγωγο, αν αρχικά ήταν ανάγωγο.

***Ορισμός 2:*** (γενίκευση) Έστω $F$ υπόσωμα του $E$ και $a \in E$. αν υπάρχει πολυώνυμο $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$ (: μηδενικού πολυωνύμου) με $f(a) = 0$, τότε λέμε ότι το $\alpha$ είναι *αλγεβρικό επί του F*. Αν δεν υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο, λέμε ότι το $\alpha$ είναι *υπερβατικό επί του F.*

***Παραδείγματα:***

- Για $F =$ Ð, $E =$ Ñ, $\alpha = \sqrt{2}$ και $f(x) = x^2 - 2 \in$ Ð$[x]$ και $f[x] \neq$ μηδενικού πολ/σμού, έχω το συμπέρασμα ότι το $\sqrt{2}$ *είναι αλγεβρικό επί του* Ð.
- Επίσης για $F =$ Ð, $E =$ Â, $a = i$ και $f(x) = x^2 + 1 \in$ Ð$[x]$ και $f(x) \neq$ μηδενικού πολ/σμού, έχω το συμπέρασμα ότι $i$(: $\sqrt{-1}$) *είναι αλγεβρικός επί του* Ð.

***Ορισμός 3:*** (γενίκευση) Αν $f(x0 \in F[x]$, $\deg f(x) \geq 1$, τότε το $f(x)$ θα λέγεται *ανάγωγο επί του F* αν για κάθε ανάλυση του $f(x)$ της μορφής $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ με $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$ να έπεται ότι $f_1(x)$ σταθερό πολυώνυμο ή $f_2(x)$ σταθερό πολυώνυμο.

***Παραδείγματα:***

- Τα $x^2+1$, $x+1$, $x^3+2$ είναι ανάγωγα επί του Ð.
- Τα $x^2+1$, $x+1$ είναι ανάγωγα επί του Ñ, όμως το $x^3+2$ δεν είναι ανάγωγο επί του Ñ, διότι $x^3+2 = (x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}-x+\sqrt[3]{4})$
- Το $x+1$ είναι ανάγωγο επί του Â, όμως το $x^2+1$ δεν είναι ανάγωγο επί του Â, διότι $x^2+1=(x+i)(x-i)$ και βεβαίως ούτε το $x^3+2$ είναι ανάγωγο επί του Â.

***Ορισμός 4:*** (γενίκευση) Αν το *α* είναι ρίζα ενός αναγώγου πολυωνύμου $f(x) \in F[x]$ με $\deg f(x) = v$, τότε το *v* λέγεται *βαθμός* του αλγεβρικού στοιχείου *α*.

***Παράδειγμα:***

- Το *i* είναι ρίζα των πολυωνύμων $x^2+1$ και $x^4-1 \in$ Ð$[x]$ ο βαθμός όμως του *i* είναι 2, διότι το $x^2+1$ είναι ανάγωγο επί του Ð, ενώ το $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$ δεν είναι ανάγωγο επί του Ð.

***Ορισμός 5:*** Αν έχω έναν διανυσματικό χώρο *V* επί ενός σώματος *F*, τότε το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του $V_F$ λέγεται *διάσταση* του $V_F$ και συμβολίζεται με $\dim_F V$ ή $[V:F]$.

***Παράδειγμα:***

- $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 / a_i \in$ Ñ$\}$. Τότε $V_{Ñ}$ είναι διανυσματικός χώρος και έχει ως βάση το $\{1, x, x^2\}$. Άρα $[v:$ Ñ$] = 3$.

***Πρόταση 1:*** Αν *F* υπόσωμα του *E*, τότε το *E* είναι διαν. χώρος επί του *F*.

***Ορισμός 6:*** Αν το $F$ είναι υπόσωμα του $E$, τότε λέμε ότι το $E$ είναι *επέκταση* του $F$ και γράφουμε συμβολικά $E/F$.

***Παραδείγματα:***

- Το Ñ είναι επέκταση του Ð.
- Το Â είναι επέκταση του Ñ.

***Ορισμός 7:*** Μια επέκταση $E/F$ λέγεται *αλγεβρική* αν όλα τα στοιχεία του $E$ είναι αλγεβρικά επί του $F$.

***Ορισμός 8:*** Αν $E/F$ και $[E:F]=\nu \in$ Ù$^{+}$, τότε η επέκταση $E/F$ λέγεται *πεπερασμένη*.

***Ορισμός 9:*** Έστω $E/F$ και $a \in E$. Με $F(a)$ συμβολίζουμε την τομή όλων των υποσωμάτων του $E$ που περιέχουν το $F$ και το $\alpha$. Δηλαδή το $F(a)$ είναι το ελάχιστο υποσώμα που περιέχει τα στοιχεία του $F$ και το $\alpha$.
Αποδεικνύεται ότι:

$$F(a)=\left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \Big/ f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0 \right\}.$$

Γενικότερα αν $S \subseteq E$ με $F(S)$ συμβολίζουμε την τομή όλων των υποσωμάτων του $E$, που περιέχουν το $F$ και το $S$.

***Ορισμός 10:*** Ένα πολυώνυμο λέγεται *μονικός*, όταν ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του, είναι η μονάδα.

***Ορισμός 11:*** Το πολυώνυμο $m(x)$ το οποίο είναι μονικό, μη μηδενικό και το ελαχίστου βαθμού που μηδενίζεται απ'το $\alpha$ καλείται *ελάχιστο πολυώνυμο* του $\alpha$ επί του $F$.

Αποδεικνύεται, ότι το ελάχιστο πολυώνυμο, είναι μονοσήμαντα ορισμένο.
Επίσης εξορισμού $F[a]=\{f(a)/f(x)\in F[x]\}$.

***Πρόταση 2:*** Αν $f(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του $\alpha$ επί του $F$, τότε το $f(x)$ ανάγωγο.

***Απόδειξη:*** Αν $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ με $g(x0, h(x) \in F[x]$ (1)

τότε $f(a) = 0$ και $g(a) \cdot h(x) = 0$ απ'όπου έχομε $g(a) = 0$ ή $h(a) = 0$.

Εάν τώρα κανένα απ'τα $g(x), h(x)$ δεν σταθερό πολυώνυμο, τότε απ'την (1) έχομε $\deg g(x) < \deg f(x)$ και $\deg h(x0 < f(x)$ πράγμα άτοπο, διότι το $f(x)$ είναι το πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού με ρίζα το *α*.

Άρα ένα από τα δύο $g(x)$ και $h(x)$ πρέπει να είναι το σταθερό και έτσι το $f(x)$ είναι ανάγωγο.

***Πρόταση 3:*** Αν το $f(x)$ είναι ανάγωγο επί του *F* με ρίζα $a \notin F$, τότε το $f(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του *α* επί του *F*.

***Απόδειξη:*** Αν το $f(x)$ δεν ήταν το ελάχιστο πολυώνυμο του *α* επί του *F*, τότε θα υπήρχε ένα άλλο $g(x) \in F[x]$ με $\deg g(x) < \deg f(x)$ και $g(a) = 0$.

Έτσι,λόγω της προτάσεως 2, το $g(x)$ θα ήταν ανάγωγο επί του $F$.

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το ανάγωγο πολυώνυμο με ρίζα το *α* είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

***Πρόταση 4:*** Έστω $E/F$, $a \in E$ και *α* αλγεβρικό επί του *F*. Τότε ο διανυσματικός χώρος $F(a)$ επί του *F*, έχει ως βάση το σύνολο $\{1, a, a^2, ..., a^{v-1}\}$, όπου *ν* είναι ο βαθμός του αλγεβρικού στοιχείου *α*, επί του *F*.

***Απόδειξη:*** Αν θεωρήσω το $m(x)$ ως ελάχιστο πολυώνυμο του *α* επί του *F*, τότε $\deg m(x) = V$. Επίσης τα διανύσματα $1, a, ..., a^{n-1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επί του *F*.

Πράγματι˙ αν $b_0 + b_1 \cdot a + ... + b_{n-1} a^{n-1} = 0$ με $b_i \in F$, $i = 1,2,..., v-1$ τότε υποχρεωτικά $(b_0, b_1, ..., b_{v-1}) = (0,0,0,...,0)$ διότι διαφορετικά, το $g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_{v-1} x^{v-1}$ θα ήταν ένα μή μηδενικό πολυώνυμο, βαθμού μικρότερου του *ν* που θα είχε ρίζα το *α*, πράγμα άτοπο αφού ο βαθμός του *α* είναι *ν*.

Αν τώρα $\sigma(x) \in F[x]$ με $\deg \sigma(x) > v-1$, τότε $\exists\, q(x), \tau(x) \in F[x] : \sigma(x) =$

$q(x)\cdot m(x)+\tau(x)$ με $\tau(x)=0$ ή $\deg\tau(x)\le v-1$.

Έτσι όμως επειδή $F[a]=F(a)$ έχω τα $\{1,a,...,a^{v-1}\}$ να παράγουν και τον χώρο $F(a)$, άρα η πρόταση απεδείχθη.

***Πρόταση 5:*** Μια πεπερασμένη επέκταση είναι αλγεβρική επέκταση.

***Απόδειξη:*** Έστω $[K:F]=n$. Έστω $a\neq 0,\ a\in K$ και οι δυνάμεις $a^0=1$, $a,a^z,...,a^n$. Τα $n+1$ αυτά στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα επί του *F* γιατί $[K:F]=n$. Άρα υπάρχουν $c_0,c_1,c_2,...,c_n\in F$ με $(c_0,c_1,...,c_n)\neq(0,0,...,0)$ ώστε:

$$c_0+c_1\cdot a+c_2\cdot a^2+...+c_{n-1}\cdot a^{n-1}+c_n\cdot a^n=0 \qquad (1)$$

Ισχύει: $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n\in F[x]$ και είναι μη μηδενικό. Επίσης λόγω της (1) ισχύει $f(a)=0$. Άρα το *α* είναι αλγεβρικό επί του *F* και επειδή το *α* είναι τυχαίο στοιχείο του $K\Rightarrow$ κάθε στοιχείο του *K* είναι αλγεβρικό επί του *F*. Άρα η επέκταση $K/F$ είναι αλγεβρική.

***Πρόταση 6:*** Έστω *F*, *E*, *K* τρία σώματα με $F\subseteq E\subseteq K$. Αν οι $E/F$ και $K/E$ είναι πεπερασμένες επεκτάσεις, τότε και η $K/F$ είναι πεπερασμένη επέκταση και $[K:F]=[K:E]\cdot[E:F]$

***Απόδειξη:*** Έστω $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ μια βάση του *K* επί του *E* και $B=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$ μια βάση του *E* επί του *F*. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $M=\{a_i\beta_j\,/\,i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m\}$ είναι μια βάση του *K* επί του *F*.

Έστω $x\in K\Rightarrow x=c_1a_1+c_2a_2+...+c_na_n, c_i\in E$ αφού το σύνολο *A* είναι μια βάση του *K* επί του *E*.

Επίσης για κάθε $c_i$ έχουμε $c_i=d_{i1}\beta_1+d_{i2}\beta_2+...+d_{im}\beta_m, d_{ij}\in F$, αφού το σύνολο *B* είναι μια βάση του *E* επί του *F*.

Άρα:

$$x=\sum_{i=1}^{n}c_ia_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}d_{ij}\beta_j\right)a_i=\sum_{i=1,j=1}^{n,m}d_{ij}\beta_ja_i\,.$$

Άρα το $M$ παράγει το $K$ επί του $F$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία του $M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεωρούμε ότι:

$$\sum_{i=1,j=1}^{n,m} d_{ij} a_i \beta_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \beta_j \right) a_i = 0 .$$

Επειδή το $\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \beta_j \in E$ και το σύνολο $A$ είναι βάση του $K$ επί του $E$.

Παίρνουμε: $\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \beta_j = 0,\ i = 1,2,...,n$ .

Αλλά $d_{ij} \in F$ και το σύνολο $B$ είναι βάση του $E$ επί του $F$.

Άρα: $d_{ij} = 0,\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2,...,m$ .

Επομένως το $M$ είναι μια βάση του $K$ επί του $F$. Επειδή $| M |= n \cdot m$ ισχύει:

$$[K : F] = [K : E] \cdot [E : F] .$$

***Λήμμα VII:*** Αν $\alpha$ και $\beta$ αλγεβρικοί αριθμοί επί του σώματος Å, τότε και το γινόμενό τους είναι αλγεβρικός αριθμός επί του σώματος Å.

***Απόδειξη:*** Θεωρούμε την επέκταση $Å(\alpha,\beta)$. Έστω ότι ο $\alpha$ είναι αλγεβρικός $n$ βαθμού και ο $\beta$ $m$ βαθμού. Τότε ισχύουν:

$$[Å(\alpha,\beta) : F(a)] = m \quad \text{και} \quad [Å((a) : Å] = n .$$

Αποδείξαμε (Πρόταση 6) ότι:

$$[Å(\alpha,\beta) : Å] = [Å(\alpha,\beta) : F(a)] \cdot [F(a) : F] = m \cdot n$$

και επειδή $m \cdot n$ πεπερασμένος αριθμός έπεται ότι η επέκταση $F(\alpha,\beta)/F$ είναι αλγεβρική.

Επειδή το $Å(\alpha,\beta)$ είναι σώμα, τότε θα είναι κλειστό ως προς την τάξη του πολλαπλασιασμού. Άρα επειδή $\alpha,\beta \in Å(\alpha,\beta) \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in Å(\alpha,\beta)$.

Επομένως ο αριθμός $\alpha \cdot \beta$ είναι αλγεβρικός.

***Ορισμός 12:*** Ένα πολυώνυμο $f(x_1, x_2,..., x_n)$ μεταβλητές λέγεται συμμετρικό στις $x_1, x_2,..., x_n$ αν παραμένει το ίδιο όταν εφαρμόσουμε μια μετάθεση στις μεταβλητές. Τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα είναι τα:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$a_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$a_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$$

$$\vdots$$

$$a_n = x_1 x_2 \cdots x_n,$$

δηλαδή το $a_k$ είναι το άθροισμα όλων των γινομένων από $k$ διαφορετικά μεταξύ τους από τα $x_1, x_2, ..., x_n$. Αποδεικνύεται ότι κάθε συμμετρικό πολυώνυμο είναι πολυώνυμο των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων δηλαδή $f(x_1 x_2, ..., x_n) = g(a_1, a_2, ..., a_n)$ για κάποιο πολυώνυμο $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ Đ$[x_1, x_2, ..., x_n]$.

(Βλέπε παρακάτω λήμμα VII(iii)).

Γενικά:

Αν $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο $n$ βαθμού με διακριτές ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ τότε:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_n) \\ &= a[x^n - (\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n)x^{n-1} + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + ... + \rho_{n-1} - \rho_n)x^{n-2} + ... \\ &\qquad + (-1)^n \rho_1\rho_2...\rho_n] \\ &= a[x^n - \mathrm{a}_1 x^{n-1} + \mathrm{a}_2 x^{n-2} - ... + (-1)^k \mathrm{a}_k x^{n-k} + ... + (-1)^n \mathrm{a}_n] \end{aligned}$$

όπου $a_k = \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} \rho_{i_1}\rho_{i_2}...\rho_{i_k}$ είναι το $k$-οστό στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο στα $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$.

Επομένως κάθε συμμετρικό πολυώνυμο των ριζών του $f(x)$ εκφράζεται ως πολυώνυμο των συντελεστών του πολυωνύμου $f(x)$.

***Ορισμός 12:*** Έστω πολυώνυμο $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ επί του σώματος *F*.

Έστω $ax_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n}$, $\beta x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} ... x_n^{\mu_n}$ δύο μονώνυμα. Υπάρχει ελάχιστος ακέραιος $j$ τέτοιος ώστε $\lambda_j \neq \mu_j$. Λέμε ότι το $\beta x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} ... x_n^{\mu_n}$ είναι μεγαλύτερο απ'το $ax_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n}$ αν $\lambda_j > \mu_j$. Έτσι ορίζεται μια διάταξη στο σύνολο των

μονωνύμων. Ο μεγαλύτερο όρος (μονώνυμο) του $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ λέγεται *κύριο όρος* του πολυωνύμου.

***Λήμμα VIII:*** Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι συμμετρικό και ότι έχει κύριο όρο τον $ax_1^{u_1}x_2^{u_2}...x_n^{u_n}$. Τότε:

(i) $u_1 \geq u_2 \geq ... \geq u_n$

(ii) Το πολυώνυμο $\alpha \cdot \mathrm{a}_1^{u_1-u_2}\mathrm{a}_2^{u_2-u_3}...\mathrm{a}_{n-1}^{u_{n-1}}\mathrm{a}_n^{u_n}$ όπου $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_n$ είναι τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα των $x_1, x_2, ..., x_n$, έχει τον ίδιο κύριο όρο με το $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

(iii) Το $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ μπορεί να γραφεί με την μορφή $g(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_n)$ για κάποιο πολυώνυμο $g(x_1, x_2, ..., x_n) \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$.

***Απόδειξη:***

(i) Το συμμετρικό πολυώνυμο $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ μαζί με τον κύριο όρο του $a \cdot x_1^{\kappa_1}x_2^{k_2}...x_i^{k_i}x_{i+1}^{k_{i+1}}...x_n^{k_n}$ πρέπει να έχει και τον όρο: $a \cdot x_1^{\kappa_1}x_2^{k_2}...x_i^{k_{i+1}}.x_{i+1}^{k_i}..x_n^{k_n}$. Απ'τον ορισμό του κύριου όρου παίρνουμε ότι $k_i \geq k_{i+1}$.

Άρα: $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n$.

(ii) Θέτουμε: $\sigma_i = k_i - k_{i+1}$, $i = 1,2,...,n-1$ και $\sigma_n = k_n$. Τότε ισχύει: $\sigma_i \geq 0$, $i = 1,2,...,n$. Ένας όρος του $a \cdot \mathrm{a}_1^{\sigma_1}\mathrm{a}_2^{\sigma_2}...\mathrm{a}_n^{\sigma_n}$ θα είναι της μορφής $a \cdot x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}...x_n^{\mu_n}$, όπου κάθε $\mu_i$ είναι άθροισμα ορισμένων απ'τους $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_\mu$. Επειδή ο κύριος όρος πρέπει να έχει το μεγαλύτερο δυνατό $\mu_1$, ο εκθέτης του $x_1$ στον κύριο όρο είναι ο $\mu_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_{n-1} + ... + \sigma_n =$ $(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + ... + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1$.

Όμοια για το μέρος $x_2^{\mu_2} \cdot x_3^{\mu_3}...x_n^{\mu_n}$ του κύριου όρου κάνουμε τον ίδιο συλλογισμό και βρίσκουμε ότι ο εκθέτης είναι ο $\sigma_2 + \sigma_3 + ... + \sigma_n = k_n$ κ.λπ.

Άρα ο κύριος όρος του $a \cdot \mathrm{a}_1^{k_1-k_2}\mathrm{a}_2^{k_2-k_3}...\mathrm{a}_n^{k_n}$ είναι ο ίδιος με τον κύριο όρο του $f(x_1, x_2,..., x_n)$.

(iii) Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f_1(x_1, x_2,..., x_n) = f(x_1, x_2,..., x_n) - a \cdot \mathrm{a}_1^{k_1-k_2}...\mathrm{a}_n^{k_n}$$

Το $f_1(x_1, x_2,..., x_n)$ είναι συμμετρικό πολυώνυμο και έχει κύριο όρο μικρότερο από τον κύριο όρο του $f(x_1, x_2,..., x_n)$. Έστω $b \cdot x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_n^{\lambda_n}$ ο κύριος όρος του $f_1(x_1, x_2,..., x_n)$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$f_2(x_1, x_2,..., x_n) = f_1(x_1, x_2,..., x_n) - a_1 \cdot \mathrm{a}_1^{\lambda_1-\lambda_2}...\mathrm{a}_n^{\lambda_n}$$

το οποίο έχει κύριο όρο μικρότερο του κύριου όρου του $f_1(x_1, x_2,..., x_n)$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και επειδή υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος πολυώνυμα μικρότερα από τα $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ η παραπάνω διαδικασία θα τελειώσει μετά από πεπερασμένο το πλήθος βήματα έστω $m$ και το $f_m(x_1, x_2,..., x_n)$ θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο $c \in F$.

Άρα $f(x_1, x_2,..., x_n) = a \cdot \mathrm{a}_1^{k_1-k_2}...\mathrm{a}_n^{k_n} + a_1 \cdot \mathrm{a}_1^{\lambda_1-\lambda_2}...\mathrm{a}_n^{\lambda_n} + ... + c$ και εάν

$g(x_1, x_2,..., x_n) = a \cdot \mathrm{a}_1^{k_1-k_2}...\mathrm{a}_n^{k_n} + a_1 \cdot \mathrm{a}_1^{\lambda_1-\lambda_2}...\mathrm{a}_n^{\lambda_n} + ... + c \in F[x_1, x_2,..., x_n]$

τότε: $f(x_1, x_2,..., x_n) = g(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2,..., \mathrm{a}_n)$.

***Λήμμα IX:*** Για την συνάρτηση

$$F(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} \cdot x^{p-1} \cdot (c_0 x^{\tau} + ... + c_{\tau})^p$$

λαμβάνω τις παρακάτω μορφές για τις παραγώγους των διαφόρων τάξεων.

Έχουμε:

$$F(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1}(c_0^p x^{rp} + ... + c_r^p) \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\left(c_0^p x^{rp+p-1} + ... + c_r^p x^{p-1}\right)$$

Οπότε

$$F^{(1)}(x) = \frac{c^5}{(p-1)!}[c_0^p(rp+p-1)x^{rp+p-2} + ... + c_r^p(p-1)x^{p-2}]$$

$$F^{(2)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}[c_0^p(rp+p-1)(rp+p-2)x^{rp+p-3} + ... + c_r^p(p-1)(p-2)x^{p-3}]$$

$$\vdots$$

$$F^{(p-2)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}[c_0^p(rp+p-1)(rp+p-2)...(rp+p-p+2)x^{rp+p-1-p+2}$$

$$+ ... + c_r^p(p-1)(p-2)...2x] \Rightarrow$$

$$F^{(p-2)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}[c_0^p(rp+p-1)(rp+p-2)...(rp+2)x^{rp+1} + ... + c_r^p(p-1)!x]$$

$$F^{(p-1)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}[c_0^p(rp+p-1)(rp+p-2)...(rp+2)(rp+1)x^{rp} + ... + c_r^p(p-1)!]$$

$$F^{(p)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}[c_0^p(rp+p-1)(rp+p-2)...(rp+2)(rp+1)rp \cdot x^{rp-1} + ... + \pi! c_{r-1}^p + 0]$$

***Θεώρημα (Lindemann):*** Ο πραγματικός αριθμός $\pi$ είναι υπερβατικός.

***Απόδειξη:*** Θα το αποδείξουμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Έστω ότι ο $\pi$ είναι αλγεβρικός, τότε και το γινόμενο $i\pi$ (όπου $i = \sqrt{-2}$) είναι αλγεβρικός αριθμός (Λήμμα VII). Άρα ο αριθμός $i\pi$ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου μή μηδενικού. Έστω ότι το πολυώνυμο αυτό είναι το $\Phi(x)$ με ρητούς συντελεστές και με ρίζες τους αριθμούς: $a_1 = i\pi$, $a_2, a_3, ..., a_n$. Είναι γνωστό (Λήμμα VI) ότι: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Επομένως:

$$(e^{a_1} + 1)(e^{a_2} + 1)...(e^{a_n} + 1) = 0 \qquad (1)$$

(Αφού $e^{a_1} + 1 = 0$)

Κάνοντας τις πράξεις στο 1ο μέλος της ισότητας (1) βρίσκουμε ένα άθροισμα δυνάμεων με βάση το $e$ και εκθέτες αθροίσματα της μορφής $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_m}$.

Για παράδειγμα ο όρος $e^{a_j} e^{a_m} e^{a_{i-1}} e^{a_i} 1 \cdot 1 ... 1 = e^{a_j + a_m + a_{i-1} + a_i}$.

Υπάρχει ένα πολυώνυμο που έχει ως ρίζες, όλα τα αθροίσματα της μορφής: $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_m}$, του οποίου οι συντελεστές, είναι συμμετρικά πολυώνυμα

των $a_1, a_2, ..., a_n$ και άρα πολυώνυμα των συν/τών του $\Phi(x)$, που είναι ρητοί αριθμοί.

Διαιρώντας το πολυώνυμο αυτό με το $x^{n-r}$ ($r$ το πλήθος των μη μηδενικών εκθετών της 1) και πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ των παρονομαστών του $\Phi(x)$ βρίσκουμε ένα πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές και ρίζες τους μη μηδενικούς εκθέτες $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ στο ανάπτυγμα της (1).

Έτσι η (1) αναπτύσσεται:

$$e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + ... + e^{\beta_r} + e^0 + e^0 + ... + e^0 = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + ... + e^{\beta_r} + k = 0 \quad \text{όπου} \quad k \in \text{Í} . \qquad (2)$$

Στο ανάπτυγμα της (1) υπάρχει ο όρος $1 \cdot 1 ... 1$. Επομένως $\kappa > 0$. Έστω ότι:

$$f(x) = cx^r + c_1 x^{r-1} + ... + c_{r-1}x + c_r \quad \text{με} \quad c_r \neq 0$$

(διότι το 0 δεν είναι ρίζα του $f(x)$).

Ορίζουμε $F(x) = \dfrac{c^s x^{p-1} \{f(x)\}^p}{(p-1)!}$, όπου $s = r(p-1)$ με $p$ πρώτο αριθμός. (3)

Επίσης ορίζουμε: $g(x) = F(x) + F'(x) + ... + F^{(s+p+r-1)}(x)$.

Ισχύει: $\deg F(x) = (p-1) + rp = p - 1 + rp$ και

$$s + p + r - 1 \overset{(3)}{=} r(p-1) + p + r - 1 = rp - \not{r} + p + \not{r} - 1 = rp + p - 1 .$$

Άρα $F^{(s+p+r)}(x) = 0$. Επίσης $g'(x0 = F'(x) + F^{(2)}(x) + ... + F^{(s+p+r-1)}(x)$.

Υπολογίζουμε την:

$$\frac{d}{dx}[e^{-x} g(x)] = -e^{-x} g(x) + e^{-x} g'(x)$$

$$= -e^{-x}[g(x0 - g'(x)]$$

$$= -e^{-x}[F(x) + F'(x) + ... + F^{(s+p+r-1)}(x)$$
$$- F'(x) - F^{(2)}(x) - ... - F^{(s+p+r-1)}(x)]$$

$$= -e^{-x} F(x) .$$

Επομένως:

$$\int_0^x [e^{-t} g(t)]' dt = -\int_0^x e^{-y} F(y) dy \Rightarrow e^{-x} g(x) - e^{-0} g(0) = \int_0^x e^{-y} F(y) dy$$

$$\Rightarrow e^{-x}g(x)-g(0)=-\int_0^x e^{-y}F(y)dy.$$

Αν θέσουμε $y=\lambda\cdot x$ (προσοχή! η μεταβλητή είναι το $\lambda$) έχουμε για τα νέα όρια ολοκλήρωσης $\left\{\begin{matrix} y=0\to\lambda=0 \\ y=x\to\lambda=1\end{matrix}\right\}$ και

$$e^{-x}g(x)-g(0)=-\int_0^1 e^{-\lambda x}F(\lambda x)d(\lambda x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}g(x)-g(0)=-x\int_0^1 e^{-\lambda x}F(\lambda x)d\lambda \overset{(\text{πολ/ζω } \cdot e^{x})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}\cdot e^{-x}g(x)-e^{x}g(0)=-x\int_0^1 e^{x}\cdot e^{-\lambda x}F(\lambda x)d\lambda$$

$$\Leftrightarrow g(x0-e^{x}g(0)=-x\int_0^1 e^{(1-\lambda)x}F(\lambda x)d\lambda.$$

Αν θέσουμε στη θέση του $x$ διαδοχικώς τα $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$, τότε παίρνουμε:

$$g(\beta_1)-e^{\beta_1}g(0)=-\beta_1\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_1}F(\lambda\beta_1)d\lambda$$

$$g(\beta_2)-e^{\beta_2}g(0)=-\beta_2\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_2}F(\lambda\beta_2)d\lambda$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$g(\beta_r)-e^{\beta_r}g(0)=-\beta_r\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_r}F(\lambda\beta_r)d\lambda.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη, χρησιμοποιώντας την ισοδύναμη σχέση της (2), ότι $-(e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+...+e^{\beta_r})=k$ Έτσι βρίσκουμε:

$$\sum_{j=1}^{r}g(\beta_j)+k\cdot g(0)=-\sum_{j=1}^{r}\beta_r\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_r}F(\lambda\beta_r)d\lambda \qquad (**)$$

***Ισχυρισμός:*** Ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{r}F^{(t)}(\beta_j)=0$, για $0<t<p$.

Πράγματι· Αν παραγωγίσουμε την $F(x)$ μέχρι και $p-1$ φορές, θα εμφανίζεται πάντα ο παράγοντας $f^{(m)}(x)$ με $1\le m\le p-1$.

Αλλά $f(\beta_i)=0$, για κάθε $i=1,2,...,r$. Άρα $f^{(m)}(\beta_i)=0$.

Άρα $\sum_{j=1}^{r}F^{(t)}(\beta_j)=0$, για $0<t<p$. ■

Αν $t \geq p$ η $F^{(t)}(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $f^m(x)$. Άρ $F^{(t)}(\beta_i) \neq 0$, $\forall\ t \geq p$. Επίσης το $F^{(t)}(x)$ έχει παράγοντα τον αριθμό $p$ (βλέπε λήμμα VIII). Το ίδιο ισχύει για $t > p$.

Άρα για οποιοδήποτε $t \geq p$ το άθροισμα: $\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j)$ είναι ένα συμμετρικό πολυώνυμο των $\beta_j$ βαθμού $\leq rp-1$ δηλαδή βαθμού $\leq s$. Δηλαδή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq s$ των συντελεστών $c_{i/c}$. Το $c^s$ έχει τεθεί στον ορισμό της $f(x)$ για να κάνει αυτό το άθροισμα έναν ακέραιο.

Άρα για $p \geq s$ έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = p\lambda_t \qquad (*)$$

για κάποιο $\lambda_t \in$ Ù.

Άρα

$$\sum_{j=1}^{r} g(\beta_j) = \sum_{j=1}^{r} [F(\beta_j) + F'(\beta_j) + \ldots + F^{(s+p+r-1)}(\beta_j)]$$

$$= \sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) + \sum_{j=1}^{r} F'(\beta_j) + \ldots + \sum_{j=1}^{r} (s+p+r-1)(\beta_j)$$

$$\overset{(*)}{=} p \cdot \lambda_0 + p \cdot \lambda_1 + \ldots + p \cdot \lambda_{s+p+r-1}$$

$$= p \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{s+p+r-1}) = p \cdot \lambda, \quad \lambda \in \text{Ù}.$$

Τώρα θα ελέγξουμε το $g(o)$.

(i) Αν $t \leq p-2$ τότε $F^{(t)}(0) = 0$

(ii) Αν $t = p-1$ τότε $F^{(t)}(0) = c^s \cdot c_r^p$

(iii) Αν $t \geq p$ τότε $F^{(t)}(0) = p \cdot l_t$ για κατάλληλο $l_t \in$ Ù. Παράδειγμα για $t = p \Rightarrow l_p = c^s \cdot c_{r-1}^p$.

Τα ανωτέρω συμπεράσματα προκύπτουν από το λήμμα IX.

Επομένως: $g(0) = c^s \cdot c_r^p + l \cdot p$, για $l \in$ Ù. $(l = l_p + l_{p+1} + \ldots + l_{rp+p-1})$.

Άρα βρήκαμε ότι το 1ο μέλος της ισότητας (**) είναι

$$p \cdot \lambda + k \cdot (c^s \cdot c_r^p + lp) = p\lambda + k \cdot c^s \cdot c_r^p + klp =$$

$$= (\lambda + kl)p + k \cdot c^s \cdot c_r^p = z \cdot p + k \cdot c^s \cdot c_r^p, \quad z \in Ù.$$

Ισχύουν: $k \neq 0,\ c \neq 0, c_r \neq 0$. Άρα αν πάρουμε το $p > \max(k, |c|, |c_r|)$, τότε το πρώτο μέλος της σχέσης (**) είναι ένας ακέραιος που δεν διαιρείται από το $p$ και επομένως είναι διάφορος από το μηδέν.

Για το δεύτερος μέλος της σχέσης (**) έχουμε:

$$|F(\lambda\beta_j)| \leq \left| \frac{c^s}{(p-1)!} \cdot (\lambda\beta_j)^{p-1} \cdot \{f(\lambda\beta)\}^p \right| = \left| \frac{c^s}{(p-1)!} \right| \cdot |\lambda|^{p-1} \cdot |\beta_j|^{p-1} \cdot |f(\lambda\beta_j)|^p$$

$$= \left| \frac{c^s}{(p-1)!\beta_j} \right| \cdot |\lambda|^{p-1} \cdot |\beta_j|^p \cdot |f(\lambda\beta_j)|^p$$

$$\leq \left| \frac{c^s}{(p-1)!\beta_j} \right| \cdot |\beta_j \cdot f(\lambda\beta_j)$$

$$\leq \frac{|c|^s \cdot \{m(j)\}^p}{|\beta_j| \cdot (p-1)!}$$

όπου $m(j) = |\beta_j| \cdot \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |f(\lambda\beta_j)$.

Και:

$$\left| -\sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j) d\lambda \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} \cdot \frac{|c|^s \cdot \{m(j)\}^p}{|\beta_j| \cdot (p-1)!} d\lambda \right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{r} \beta_j \cdot \frac{|c|^s \cdot \{m(j)\}^p}{|\beta_j| \cdot (p-1)!} \cdot \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} d\lambda \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{r} |\beta_j| \cdot \frac{|c|^s \cdot |m(j)|^p}{|\beta_j| \cdot (p-1)!} \cdot \left| \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} dl \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \frac{|c|^s \cdot |m(j)|^p \cdot B}{(p-1)!},$$

όπου

$$B = \left| \max_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} d\lambda \right|.$$

Αλλά για $p \to +\infty$ το $\sum_{j=1}^{r} \frac{|c|^s \cdot |m(j)|^p \cdot B}{(p-1)!}$ τείνει στο 0. Άρα για $p \to +\infty$ το

πρώτο και το δεύτερο μέλος της (**) είναι άνισα. Άτοπο. Άρα το $\pi$ δεν είναι αλγεβρικός.

Επομένως το $\pi$ είναι υπερβατικός αριθμός.